PAGINA EDUCATIVA

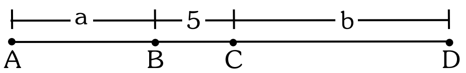
GEOMETRÍA

EJERCICIOS RESUELTOS DE SEGMENTOS

1.- En los puntos colineales A, B, C y D se cumple que $BC = 5$, $AC + BD = 20$. Hallar AD.

a) 10 b) 15 c) 12
d) 18 e) 14

Solución:



Nos piden:

$$AD = a + 5 + b$$
$$AD = (a + b) + 5 \ldots \text{(I)}$$

Por dato:

$$AC + BD = 20$$
$$(a + 5) + (5 + b) = 20$$
$$a + b = 10 \ldots \text{(II)}$$

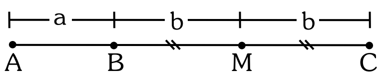
De (I) y (II):

$\boxed{AD = 15}$ Rpta.

2.- En una recta se toman los puntos consecutivos A, B y C tal que $AB + AC = 18$, luego se toma el punto medio M del segmento $\overline{BC}$. Hallar AM.

a) 10 b) 8 c) 9
d) 18 e) 16

Solución:



Nos piden:

$$AM = a + b \ldots \text{(I)}$$

Por dato:

$$AB + AC = 18$$
$$a + (a + 2b) = 18$$
$$a + b = 9 \ldots \text{(II)}$$

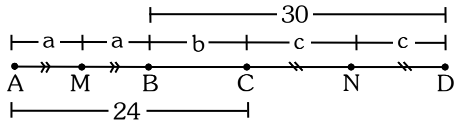
De (I) y (II):

$\boxed{AM = 9}$ Rpta.

3.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D; de modo que: $AC = 24m$. y $BD = 30m$. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

a) 21m. b) 23m. c) 25m.
d) 27m. e) 30m.

Solución:



Nos piden:

$$MN = a + b + c \ \ldots \text{(I)}$$

Por dato:

$$AC = 24 \ \rightarrow \ 2a + b = 24 \ \ldots \text{(II)}$$
$$BD = 30 \ \rightarrow \ b + 2c = 30 \ldots \text{(III)}$$

Sumando (II) y (III):

$$a + b + c = 27 \ \ldots \text{(IV)}$$

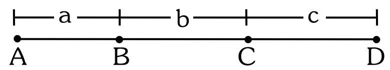
De (I) y (IV):

$\boxed{MN = 27m.}$ Rpta.

4.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D de modo que: $AB.BD + AC.CD = AD.BC$ y $AB.CD = 8m^2$. Calcular la longitud del segmento $\overline{BC}$.

a) 1m. b) 2m. c) 3m.
d) 4m. e) 5m.

Solución:



Nos piden:

$$BC = b \ \ldots \text{(I)}$$

Por dato:

$$AB \cdot CD = 8 \rightarrow \ ac = 8 \ \ldots \text{(II)}$$

También:

$$AB \cdot BD + AC \cdot CD = AD \cdot BC$$
$$a(b + c) + (a + b)c = (a + b + c)b$$
$$2ac = b^2 \ \ldots \text{(III)}$$

De (II) y (III):

$$b = 4 \ \ldots \text{(IV)}$$

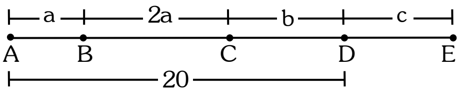
Con (I):

$\boxed{BC = 4m.}$ Rpta.

5.- Los puntos A, B, C, D y E se encuentran sobre una línea recta de tal forma que $BC = 2AB$, $AD = 20$, $(AB)(CE) = (AC)(BD)$. Encontrar DE.

a) 20 b) 30 c) 15
d) 40 e) 35

Solución:



Nos piden:

$$DE = c \ \dots \text{(I)}$$

Por dato:

$$AD = 20 \ \rightarrow \ 3a + b = 20 \ \dots \text{(II)}$$

También:

$$(AB)(CE) = (AC)(BD)$$
$$a(b + c) = (3a)(2a + b)$$
$$c = 2(3a + b) \ \dots \text{(III)}$$

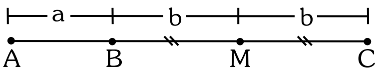
De (I), (II) y (III):

$\boxed{DE = 40}$ Rpta.

6.- En una línea recta se marcan los puntos consecutivos A, B y C; luego se toma el punto medio M de $\overline{BC}$. Encontrar AM, si $\dfrac{(BC)^2}{4} + AB \cdot AC = 64$.

a) 10 b) 8 c) 9
d) 18 e) 16

Solución:



Nos piden:

$$AM = a + b \ \dots \text{(I)}$$

Por dato:

$$\frac{(BC)^2}{4} + AB \cdot AC = 64$$
$$\frac{(2b)^2}{4} + a(a + 2b) = 64$$
$$a + b = 8 \dots \text{(II)}$$

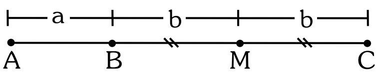
De (I) y (II):

$\boxed{AM = 8}$ Rpta.

7.- En los puntos colineales A, B y C se toma el punto medio M de $\overline{BC}$ de modo que: $(AB)^2 + (AC)^2 = 26$. Hallar $(AM)^2 + (BM)^2$.

a) 10 b) 13 c) 26
d) 20 e) 14

Solución:



Nos piden:

$$(AM)^2 + (BM)^2 = (a + b)^2 + b^2$$
$$(AM)^2 + (BM)^2 = a^2 + 2ab + 2b^2 \dots \text{(I)}$$

Por dato:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = 26$$
$$a^2 + (a + 2b)^2 = 26$$
$$(a^2 + 2ab + 2b^2) = 13 \dots \text{(II)}$$

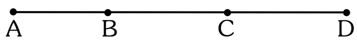
De (I) y (II):

$\boxed{(AM)^2 + (BM)^2 = 13}$ Rpta.

8.- Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C y D de modo que $AB \cdot CD = AD \cdot BC$, además $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{6}$. Encontrar AC.

a) 9 b) 15 c) 12
d) 18 e) 24

Solución:



$$AB \cdot CD = AD \cdot BC \dots \text{(I)}$$
$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{6} \dots \text{(II)}$$

OBSERVACIÓN: Todos los problemas que se presentan de esta forma, se resuelve siempre de la siguiente manera: Observamos en (I), AB y AD se encuentran en (II), pero CD y BC no se encuentran en (II), entonces los que no se encuentran en (II) se buscan en los puntos ubicados en la línea recta y los que se encuentran en (I) y en (II) se dejan, veamos:

De la figura:

$$CD = AD - AC$$
$$BC = AC - AB$$

De este último observamos que AD y AB se encuentran en (I) y en (II), además AC es nuestra incógnita, luego reemplazamos en (I):

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC$$
$$AB(AD - AC) = AD(AC - AB)$$
$$AB \cdot AD - AB \cdot AC = AD \cdot AC - AD \cdot AB$$
$$2AB \cdot AD = AD \cdot AC + AB \cdot AC$$
$$2AB \cdot AD = (AD + AB)AC$$
$$\frac{2}{AC} = \frac{(AD + AB)}{AB \cdot AD}$$
$$\frac{2}{AC} = \frac{AD}{AB \cdot AD} + \frac{AB}{AB \cdot AD}$$

Teorema de DESCARTES:

$$\boxed{\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}} \dots \text{(III)}$$

De (II) y (III):

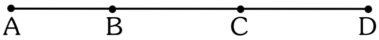
$\boxed{AC = 12}$ Rpta.

9.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D, que cumple la siguiente condición $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$. Si $\frac{BC\cdot CD}{CD-BC}=8$, hallar $\frac{1}{AD}+\frac{1}{AB}$.

a) 8 b) $\frac{1}{16}$ c) 16

d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{8}$

Solución:



$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}\ \ldots\ (I)$$

$$\frac{BC\cdot CD}{CD-BC}=8\ \ldots\ (II)$$

El dato (I) es conocido, entonces es seguro que utilizaremos el Teorema de DESCARTES, ahora, lo que debemos hacer es relacionar este dato con el dato (II):

De la figura se tiene:

$$AB=AC-BC$$
$$AD=AC+CD$$

Estas expresiones las reemplazamos en (I):

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$$

$$\frac{AC-BC}{BC}=\frac{AC+CD}{CD}$$

$$AC\cdot CD-BC\cdot CD=AC\cdot BC+CD\cdot BC$$

$$AC\cdot CD-AC\cdot BC=2BC\cdot CD$$

$$\frac{AC}{2}=\frac{BC\cdot CD}{CD-BC}\ \ldots\ (III)$$

De (II) y (III):

$$AC=16$$

Ahora, utilizando el Teorema de DESCARTES:

$$\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$$

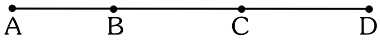
Tendremos:

$$\boxed{\frac{1}{AD}+\frac{1}{AB}=\frac{1}{8}}$$ Rpta.

10.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D tal que se cumple la siguiente relación: $AB\cdot CD=n\cdot AD\cdot BC$, además se cumple que $\frac{1}{AD}+\frac{n}{AB}=\frac{8}{AC}$. Hallar "n".

a) 7 b) 9 c) $\frac{1}{8}$ d) 1 e) $\frac{1}{7}$

Solución:



Por dato:

$$AB\cdot CD=n\cdot AD\cdot BC\ \ldots\ (I)$$

$$\frac{1}{AD}+\frac{n}{AB}=\frac{8}{AC}\ \ldots\ (II)$$

De la figura:

$$CD=AD-AC$$
$$BC=AC-AB$$

Reemplazando ambas expresiones en (I):

$$AB(AD-AC)=n\cdot AD(AC-AB)$$

$$AB\cdot AD-AB\cdot AC=n\cdot AD\cdot AC-n\cdot AD\cdot AB$$

$$AB\cdot AD\cdot(1+n)=n\cdot AD\cdot AC+AB\cdot AC$$

$$AB\cdot AD\cdot(1+n)=(n\cdot AD+AB)AC$$

$$\frac{(1+n)}{AC}=\frac{(nAD+AB)}{AB\cdot AD}$$

$$\frac{(1+n)}{AC}=\frac{n}{AB}+\frac{1}{AD}\ \ldots\ (III)$$

De (II) y (III):

$$1+n=8$$

$$\boxed{n=7}$$ Rpta.

11.- Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C y D cumpliéndose: $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$ y $AB-BC=CD$.

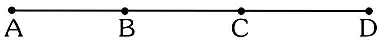
¿Cuál de las siguientes alternativas es la correcta?

a) $CD^2=BC\cdot AD$ b) $CD^2=AB\cdot AC$

c) $CD^2=BC\cdot AB$ d) $CD^2=BC\cdot AC$

e) $CD^2=\frac{BC\cdot AD}{2}$

Solución:



Por dato:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$$

Por Razones y Proporciones:

$$\frac{AB-BC}{BC}=\frac{AD-CD}{CD}\ \ldots\ (I)$$

También por dato se tiene:

$$AB-BC=CD\ \ldots\ (II)$$

De la figura:

$$AD-CD=AC\ \ldots\ (III)$$

(II) y (III) en (I):

$$\frac{CD}{BC}=\frac{AC}{CD}$$

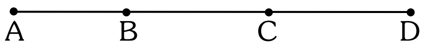
Finalmente:

$$\boxed{CD^2=BC\cdot AC}$$ Rpta.

12.- Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D de tal manera que se cumple $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ y $\dfrac{a}{AC} + \dfrac{b}{CD} = \dfrac{c}{BD} + \dfrac{d}{AB}$. Hallar $(a+b+c+d)$.

a) 6 b) 9 c) 18
d) 15 e) 12

Solución:



Por dato:

$$AB \cdot CD = BC \cdot AD \ldots \text{(I)}$$

De la figura:

$$CD = BD - BC$$
$$AD = AB + BD$$

Reemplazando en (I):

$$AB \cdot (BD - BC) = BC \cdot (AB + BD)$$

De donde:

$$\frac{1}{BC} = \frac{2}{BD} + \frac{1}{AB} \ldots \text{(II)}$$

También de la figura:

$$AB = AC - BC$$
$$AD = AC + CD$$

Reemplazando en (I):

$$(AC - BC) \cdot CD = BC \cdot (AC + CD)$$

De donde:

$$\frac{1}{BC} = \frac{2}{AC} + \frac{1}{CD} \ldots \text{(III)}$$

De (II) y (III):

$$\frac{2}{AC} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{BD} + \frac{1}{AB}$$

Luego:

$$a = 2,\ b = 1,\ c = 2 \text{ y } d = 1$$

Por lo tanto:

$$\boxed{a+b+c+d=6} \text{ Rpta.}$$