PAGINA EDUCATIVA

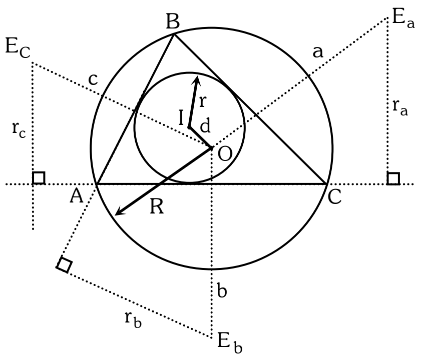
GEOMETRÍA

EJERCICIOS RESUELTOS DE RELACIONES METRICAS

01. En un triángulo, si la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos que une su circuncentro con los excentros y con el incentro de dicho triángulo es $48\ m^2$. Calcular la longitud de su circunradio.

a) 1 m b) 2 m c) 3 m
d) 4 m e) 5 m

Resolución:



Por el teorema de Euler sabemos que:

$a^2 = R^2 + 2Rr_a$

$b^2 = R^2 + 2Rr_b$

$c^2 = R^2 + 2Rr_c$

$d^2 = R^2 - 2Rr$

Sumando:

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2 + 2R(r_a + r_b + r_c - r)$

Por el Teorema de Steiner

$r_a + r_b + r_c - r = 4R$

Reemplazando: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2 + 2R(4R)$

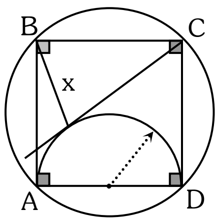
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12R^2$

Por dato: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 48\ m^2$

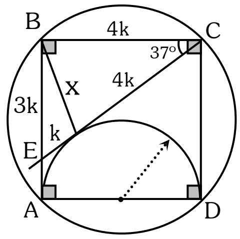
Reemplazando: $R = \boxed{2\ m}$ **Rpta.**

02. En la figura. Hallar el valor de "x" si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 20 m

a) $2\sqrt{5}$ m
b) $4\sqrt{10}$ m
c) $3\sqrt{7}$ m
d) $\sqrt{5}$ m
e) $8\sqrt{6}$ m



Resolución:



En el triángulo rectángulo EBC por el teorema de Stewart:

$x^2(5k) = (4k)^2(k) + (3k)^2(4k) - (k)(4k)(5k)$

$5x^2 = 16k^2 + 36k^2 - 20k^2$

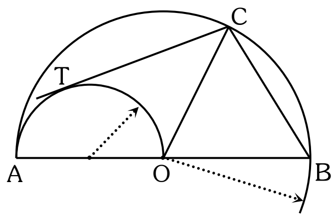
$x = \frac{4}{5}\sqrt{10}k$

Pero: $4k = 20 \rightarrow k = 5$

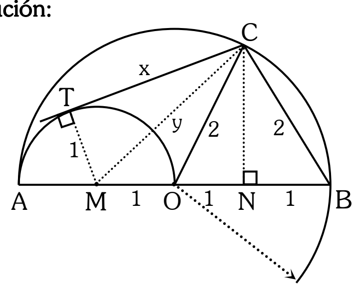
$x = \boxed{4\sqrt{10}\ m}$ **Rpta.**

03. En la figura mostrada, si $AO = OB = 2\ m$ y $OC = CB$. Hallar: CT

a) $\sqrt{3}$ m
b) $\sqrt{6}$ m
c) $2\sqrt{2}$ m
d) $3\sqrt{2}$ m
e) $2\sqrt{5}$ m



Resolución:



En el triángulo MCO por el teorema de Euclides:

$y^2 = 1^2 + 2^2 + 2(1)(1)$

De donde: $y = \sqrt{7}$ m .... (I)

En el triángulo rectángulo MTC, aplicamos el teorema de Pitágoras:

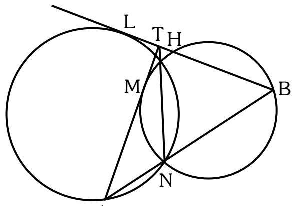
$y^2 = 1^2 + x^2$ .... (II)

Reemplazando (I) en (II)

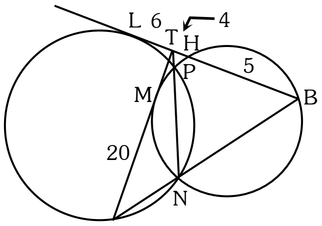
$7 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \boxed{\sqrt{6}\ m}$ **Rpta.**

04. En la figura mostrada los puntos M y L son puntos de tangencia y los puntos A, N y B son colineales, además: $TH = 4$ m, $HB = 5$ m y $AM = 20$ m. Hallar la longitud del segmento $\overline{AB}$

a) 22 m
b) 25 m
c) 30 m
d) 40 m
e) 50 m



Resolución:



Por el teorema de la tangente:

$TL^2 = TP \cdot TN \quad \ldots \text{(I)}$

Por teorema de la secante:

$(4)(9) = TP \cdot TN \quad \ldots \text{(II)}$

De (I) y (II)

$TL^2 = (9)(4) \Rightarrow TL = 6$

Nuevamente por el teorema de tangente:

$15^2 = AB \cdot BN$

$20^2 = AB \cdot AN$

Sumando:

$225 + 400 = AB\left(\underbrace{AN + BN}_{AB}\right)$

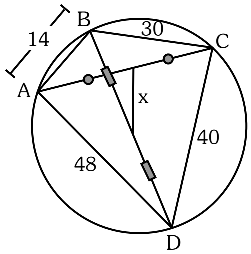
$625 = AB^2$

De donde: $AB = \boxed{25 \text{ m}}$ **Rpta.**

05. son 14 m, 30 m 40 m y 48 m respectivamente. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

a) 10 m
b) 15 m
c) 20 m
d) 30 m
e) 40 m

Resolución:



Por el teorema de Euler:

$14^2 + 30^2 + 40^2 + 48^2 = AC^2 + BD^2 + 4x^2$

Por el teorema de Ptolomeo

$AC \cdot BD = (30)(48) + (14)(40) \quad \ldots \text{(I)}$

Por el teorema de Vietta

$\frac{AC}{BD} = \frac{(30)(40) + (14)(48)}{(14)(30) + (40)(48)}$

$\frac{AC}{BD} = \frac{4}{5} \quad \ldots \text{(II)}$

De (I) y (II) se tiene que:

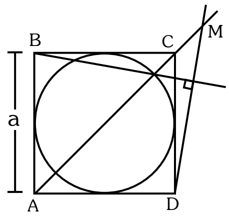
$AC = 40$ m y $BD = 50$ m

Reemplazando estos valores se obtiene:

$x = \boxed{15 \text{ m}}$ **Rpta.**

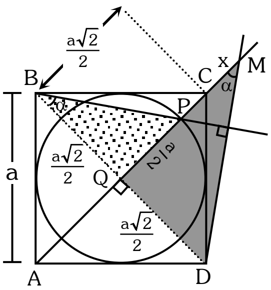
06. En la figura mostrada, calcular el valor de "CM" si ABCD es un cuadrado, $a = \left(2 + \sqrt{2}\right)$ m

a) 2 m
b) 1 m
c) 3 m
d) 4 m
e) 5 m



Resolución:
Al trazar la diagonal BD el punto de intersección "Q" equidista de los cuatro vértices, de donde se tendrá que:

$$BQ = QD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



En el triángulo rectángulo BQC:

$$BQ = QC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Además se observa que los triángulos rectángulos BQP y MQD son semejantes.

$$\frac{x+\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}}$$

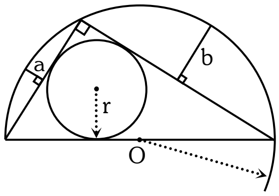
$$x = \frac{a}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)\ ;\ a = 2+\sqrt{2}$$

$$x = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{2}{2}$$

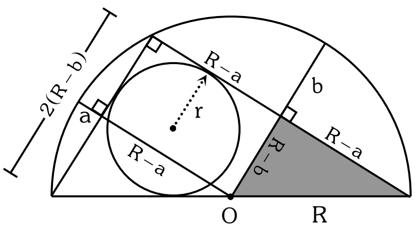
$x = \boxed{1\text{ m}}$ **Rpta.**

07. En la figura mostrada, si a y b son las longitudes de las sagitas, determinar el valor de "r".

a) $\sqrt{ab}$
b) $\sqrt{2ab}$
c) $2\sqrt{ab}$
d) $5\sqrt{ab}$
e) ab



Resolución:



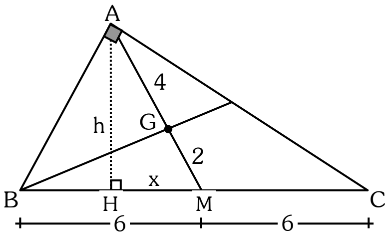
Por el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado:
$R^2 = (R-a)^2 + (R-b)^2$
Por el teorema de Poncelet en el triángulo rectángulo ABC :
$2(R-a) + 2(R-b) = 2R + 2r$
$R - r = a + b$

De (I) y (II) se concluye que:
$r = \boxed{\sqrt{2ab}}$ **Rpta.**

08. En un triángulo rectángulo la distancia del ortocentro al baricentro es 4 cm. Hallar el mayor valor entero que puede asumir la altura relativa hacia la hipotenusa.

a) 3 b) 5 c) 6
d) 8 e) 10

Resolución:



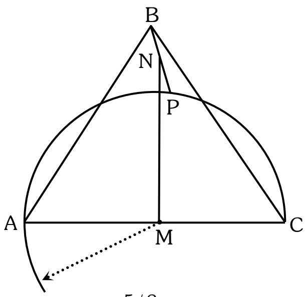
Recordando que en un triángulo rectángulo el ortocentro es el vértice recto y sobre la mediana relativa a la hipotenusa se encuentra el baricentro (G).
Si AG=4 $\Rightarrow$ GM=2
De donde AM=6

En el triángulo rectángulo AHM:
$AH < AM$
$h < 6\ \Rightarrow$ h=5, 4, 3, ...

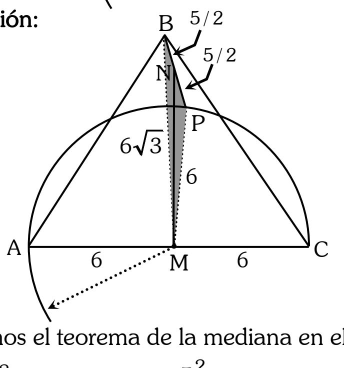
Piden $h_{máx} = \boxed{5}$ **Rpta.**

09. En la figura mostrada, se tiene el triángulo equilátero ABC, si $AB = 12$ m y $BP = 5$ m . Hallar MN, siendo M y N puntos medios.

a) $\sqrt{65,75}$ m
b) $\sqrt{55,73}$ m
c) $\sqrt{77}$ m
d) $\sqrt{101}$ m
e) $\sqrt{53}$ m



Resolución:



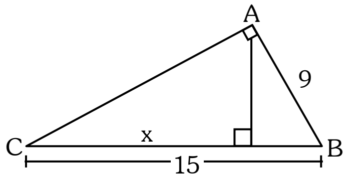
Aplicamos el teorema de la mediana en el triángulo MBP:

$$\left(6\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 2MN^2 + \frac{5^2}{2}$$

De donde: $MN = \boxed{\sqrt{65,75}\text{ m}}$ **Rpta.**

10. En la figura hallar el valor de "x"

a) 9
b) 10
c) 9,6
d) 8,5
e) 7,5



Resolución:

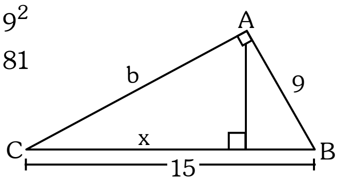
Por el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$15^2 = b^2 + 9^2$

$b^2 = 225 - 81$

$b^2 = 144$

$\boxed{b = 12}$



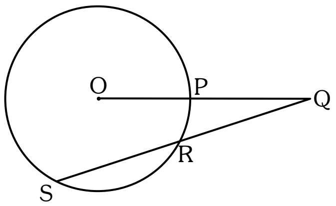
Por relaciones métricas:

$b^2 = x(15) \Rightarrow 12^2 = x(15)$

$x = \dfrac{48}{5} \Rightarrow x = \boxed{9,6}$ **Rpta.**

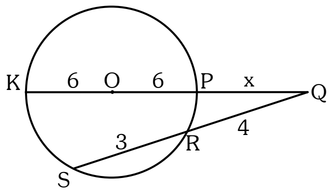
11. En la figura, "O" es el centro de la circunferencia. Si: $QR = 4$ y $RS = 3$ y además el radio de la circunferencia mide 6 cm; calcular el valor de PQ.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 2,5
e) 1,5



Resolución:

Aplicaremos relaciones métricas en la circunferencia específicamente el teorema de las cuerdas.



QS.QR = QK.QP

7(4) = (x + 12)x

x(x + 12) = 28

x(x + 12) = 2(2 + 12)

Comparando:

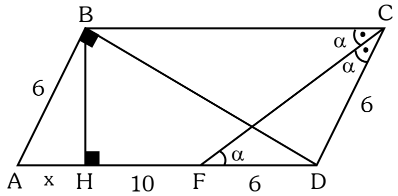
$x = \boxed{2}$ **Rpta.**

12. En un romboide ABCD, con $m\measuredangle ABD = 90°$; se cumple que la bisectriz del ángulo BCD intersecta en F a $\overline{AD}$. Se traza la altura $\overline{BH}$ del romboide. Hallar AH, si: $HF = 10$ y $AB = 6$.

a) 1 b) 3 c) 2
d) 4 e) 6

Resolución:

Piden $AH = x$



$AB = CD = 6$

pero Δ CFD: Isósceles ⇒ FD = 6

En Δ ABD, por relaciones métricas: $6^2 = x(x + 10 + 6)$

$36 = x(x + 16)$

Buscando simetría:

$2(2 + 16) = x(x + 16)$

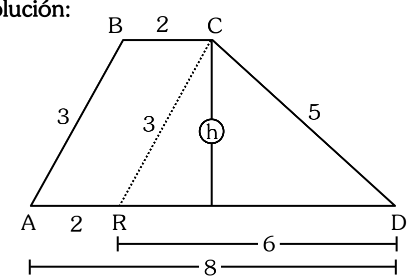
$\therefore\ x = \boxed{2}$ **Rpta.**

13. Los lados no paralelos de un trapecio miden 3 y 5, sus bases miden 2 y 8. Hallar la altura del trapecio.

a) $\dfrac{2}{3}\sqrt{14}$ b) $2\sqrt{14}$ c) $3\sqrt{14}$

d) $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$ e) $\dfrac{3\sqrt{14}}{2}$

Resolución:



Se traza $\overline{CR} // \overline{AB} \Rightarrow$ CR=3; AR=2

En el Δ RCD aplicamos HERÓN:

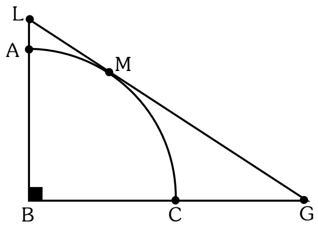
$p = \dfrac{3+5+6}{2} \Rightarrow \boxed{p = 7}$

$h = \dfrac{2}{6}\sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}$

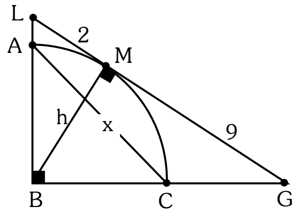
$h = \dfrac{1}{3}\sqrt{56} \Rightarrow h = \boxed{\dfrac{2}{3}\sqrt{14}}$ **Rpta.**

14. En la figura, M es punto de tangencia, B es centro de arco AC. Hallar AC, si $LM = 2$ y $MG = 9$.

a) 3
b) 4
c) 6
d) 8
e) 9



Resolución:



Nos piden $AC = x$, del Δ ABC:

$AB = BC = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, en el Δ LBG: $BM = h = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$

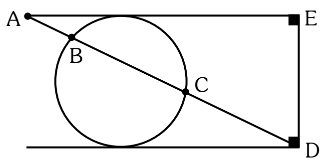
Por relaciones métricas:

$h^2 = 2\times 9 \Rightarrow \left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = 18$, así: $x^2 = 36$

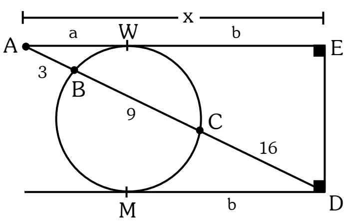
$x = \boxed{6}$ **Rpta.**

15. Calcular AE, si $AB = 3$, $BC = 9$, $CD = 16$.

a) 25
b) 30
c) 28
d) 26
e) 24



Solución:



Sea $AW = a$; $WE = MD = b \Rightarrow \boxed{x = a + b}$

Por el teorema de la tangente:

$a^2 = 3\times 12 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow \boxed{a = 6}$

$b^2 = 16\times 25 \Rightarrow b = 4\times 5 \Rightarrow \boxed{b = 20}$

Nos piden: $x = \boxed{26}$ **Rpta.**