EJERCICIOS RESUELTOS DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

01. Se han determinado como máximo 45 planos utilizando "n" rectas secantes, determinar el valor de "n".

a) 12 b) 10 c) 15
d) 25 e) 30

Resolución:
Recordemos el siguiente postulado, dos rectas secantes determinan un plano al cual con "n" rectas secantes, tomadas de dos en dos, se determinan planos.

En efecto: $C_2^n = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

Por dato: $\dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 45$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 2(45)$

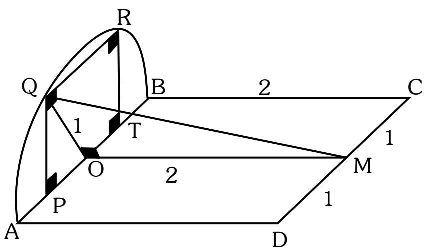
$n(n-1) = (10)(9)$

De donde: $n = \boxed{10}$ **Rpta.**

02. Un cuadrado ABCD y una semicircunferencia de diámetro AB están contenidos en dos planos perpendiculares. En la semicircunferencia se inscribe el cuadrado PQRT de manera que PT se encuentra en AB. Si $AB = 2$ cm, calcular MQ, siendo M el punto medio del lado $\overline{CD}$.

a) $\sqrt{2}$ cm b) $\sqrt{3}$ cm c) 2 cm
d) $\sqrt{5}$ cm e) $2\sqrt{3}$ cm

Resolución:
Graficando adecuadamente:



Por Pitágoras:
OQ es el radio de la semicircunferencia,

$QM^2 = OQ^2 + OM^2$, $OQ = 1cm$
$OM = 2cm$

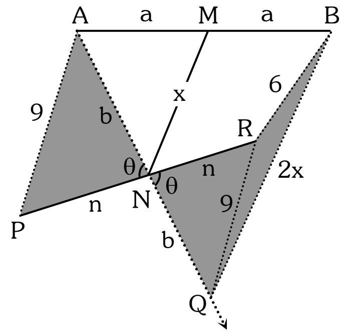
Así: $QM^2 = 1^2 + 2^2$

$QM = \boxed{\sqrt{5}\text{ cm}}$ **Rpta.**

03. Se tienen dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{PR}$, alabeados de modo que $\overline{AP}$ y $\overline{BR}$ miden 9 y 6 m. respectivamente. Cual de los siguientes valores puede tomar el segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{PR}$.

a) 15 m b) 7,5 m c) 9 m
d) 6 m e) 18 m

Resolución:

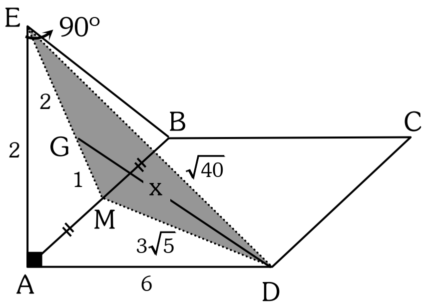


Por dato $\overline{AB}$ y $\overline{PR}$ alabeados o cruzados.
$AP = 9$ m y $BR = 6$ m
Se une A con N y luego se prolonga.
A continuación se traza $\overline{BQ}$ paralela a $\overline{MN}$.
Luego en el triángulo QAB, por el teorema de los puntos medios $BQ = 2x$
Además: $AN = NQ$
El Δ PAN $\cong$ Δ RQN (L.A.L)
$\Rightarrow$ AP=RQ=9 m
Finalmente en el Δ QRB ; por el teorema e la desigualdad triangular:
$9-6 < 2x < 9+6$
$1,5 < x < 7,5$
Luego el valor que puede adoptar "x" es:
$\boxed{6\text{ m}}$ **Rpta.**

04. Se tiene un cuadrado ABCD de lado cuya longitud es 6 m. Se construye el triángulo rectángulo ABE, cuyo plano es perpendicular al plano del cuadrado. Si: $AE = 2$ m . Hallar GD siendo "G" baricentro del triángulo ABE.

a) 3, 4 m b) 6,4 m c) 5, 6 m
d) 7 m e) 8 m

Resolución:



Por dato: $AB = 6 \Rightarrow EM=3$

Si "G" es baricentro del Δ rectángulo AEB

Si: $EG = 2$ m $\Rightarrow GM=1$ m

En el triángulo rectángulo AED: $ED = \sqrt{40}$

En el triángulo rectángulo AMD: $MD = 3\sqrt{5}$

En el Δ MED; para calcular "x" es necesario aplicar el Teorema de Stewar:

$$x^2(3) = \left(\sqrt{40}\right)^2(1) + \left(3\sqrt{5}\right)^2(2) - (2)(1)(3)$$

De donde: $x = \boxed{6{,}4 \text{ m}}$

05. Indica verdadero (V) o falso (F) en las afirmaciones:

I. Tres puntos determinan siempre un plano ( )
II. Dos rectas determinan siempre un plano ( )
III. Si una recta es paralela a un plano, será paralela a todas las rectas contenidas en dicho plano ( )
IV. Si una recta es perpendicular a un plano, será perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano ( )

a) VVVV b) VVFV c) FVFV
d) FFFF e) VFVV

Resolución:

Por teoría:

* **(F)** Tres puntos <u>no colinelaes</u> determinan un plano.
* **(F)** Dos rectas <u>paralelas ó secantes</u> determinan un plano.
* **(F)** Solo será paralela a la recta que esta contenida en el plano y que sigue la misma dirección de la anterior.
* **(F)** Solo a las que pasan por el pie de la perpendicular.

Lo correcto es: $\boxed{\text{FFFF}}$ **Rpta.**

06. En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado y ABE es un triángulo equilátero, situados en planos perpendiculares. Si: $AB = 2$ m ; $AM = ME$ y "O" centro del cuadrado. Hallar el área de la región triangular MOD.

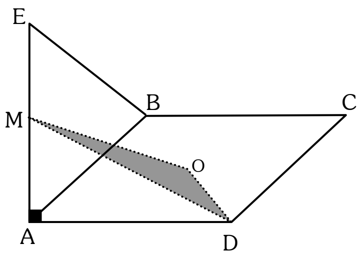
a) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ m^2

b) $\dfrac{\sqrt{23}}{3}$ m^2

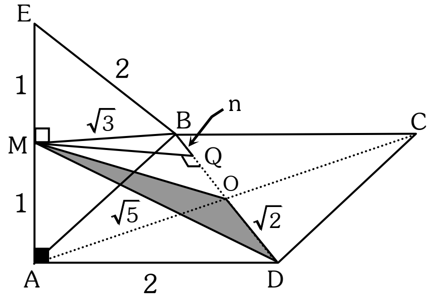
c) $\dfrac{\sqrt{17}}{5}$ m^2

d) $\dfrac{\sqrt{13}}{6}$ m^2

e) $\dfrac{\sqrt{11}}{7}$ m^2



Resolución:



Por dato: $AM = ME = 1$ m y $AD = 2$ m

En el Δ rectángulo AMD: $MD = \sqrt{5}$ m

En el Δ equilátero AEB, $BM = \sqrt{3}$ m

Para calcular el área del Δ MOD; es necesario calcular su altura MQ.

Para ello en el Δ MBD por el teorema de Euclides:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2n\left(2\sqrt{2}\right)$$

$$4n\sqrt{2} = 11 - 5 \rightarrow n = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Luego en el triángulo rectángulo MBQ:

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + MQ^2 \Rightarrow MQ = \sqrt{\frac{15}{8}}$$

Finalmente nos piden el área:

$$\text{Área}(MOD) = \left(\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

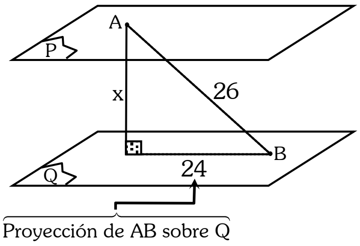
$$\text{Área}(MOD) = \boxed{\frac{\sqrt{15}}{4} \ m^2}$$ **Rpta.**

07. Un segmento de recta AB de 26cm de longitud une el punto A del plano "P" con el punto B del plano "Q" siendo ambos planos paralelos. La proyección de $\overline{AB}$ sobre cualquiera de los dos planos mide 24 cm. Halla la distancia entre dichos planos.

a) 20cm b) 16 cm c) 15 cm
d) 10 cm e) 22 cm

Resolución:

Graficando:



* En el Δ rectángulo

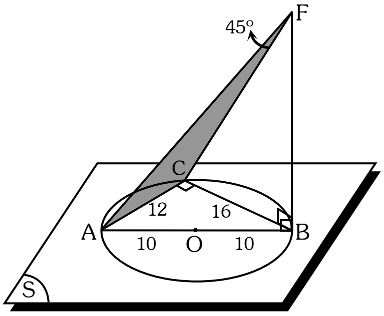
$$26^2 = x^2 + 24^2$$

$100 = x^2 \Rightarrow x = \boxed{10}$ **Rpta.**

08. Se tiene un plano "S" en el cual se tiene un círculo cuyo radio mide 10 m. Se traza el diámetro $\overline{AB}$ y la cuerda $\overline{BC}$ que mide 16 m, se levanta luego la perpendicular $\overline{BF}$ al plano "S" de modo que el ángulo AFC mide 45°. Hallar el área de la región triangular AFC.

a) $72\ m^2$ b) $37\ m^2$ c) $45\ m^2$
d) $55\ m^2$ e) $56\ m^2$

Resolución:



Del grafico se observa que:
$AB = 20\ m\ ;\ BC = 16\ m\ \Rightarrow\ AC = 12\ m$

Ahora como $\overline{FB} \perp \overline{BC}$ y $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ entonces $\overline{FC} \perp \overline{AC}$
(Teorema de las tres perpendiculares)

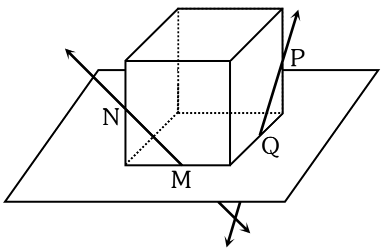
Luego e triángulo rectángulo ACF es isósceles $AC = CF = 12$, luego el área es:

$$\text{Area}(AFC) = \frac{(12)(12)}{2}$$

$\text{Area}(AFC) = \boxed{72\ m^2}$ **Rpta.**

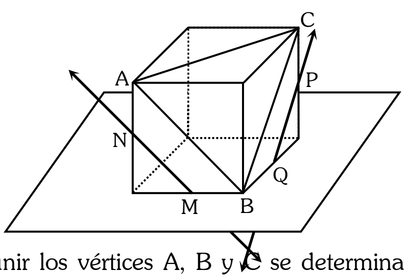
09. La figura muestra un cubo donde M, N, P y Q son puntos medios de las aristas. Halla la medida del ángulo entre las rectas $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$.

a) 45°
b) 30°
c) 90°
d) 60°
e) 75°



Resolución:

Se traza la diagonal de las caras que contienen a las rectas:



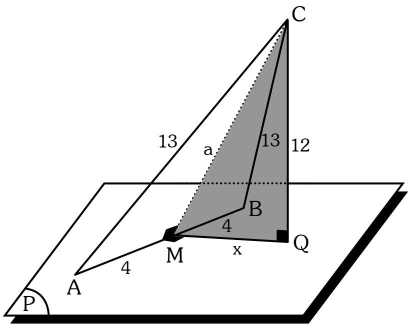
* Al unir los vértices A, B y C se determina un triangulo equilátero:
* $MN // AB$ (T.P.M)
* $PQ // BC$ (T.P.M)

$\therefore$ el ángulo formado por la rectas $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$

es igual que el $ABC = \boxed{60°}$ **Rpta.**

10. En un plano "P" se tiene un segmento $\overline{AB}$ de 8 m de longitud, en el espacio se toma el punto "C" de manera que los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ miden 13 m cada uno. Sabiendo que la perpendicular $\overline{CQ}$ al plano mide 12 m. Calcular la distancia del punto "Q" al segmento $\overline{AB}$.

a) 1 m b) 2 m c) 3 m
d) 4 m e) 5 m



Por dato se tiene que:
$AC = CB = 13\ m\ ;\ AB = 8\ m\ \text{ y }\ CQ = 12\ m$

En el triángulo isósceles ACB, CM es altura y mediana $\Rightarrow AM = MB = 4$.

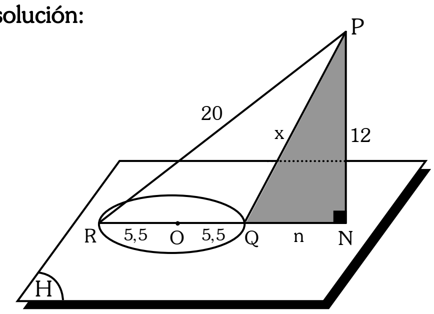
En el triángulo rectángulo AMC
$13^2 = a^2 + 4^2\ \rightarrow\ a^2 = 153$

En el triángulo rectángulo MCQ:
$a^2 = x^2 + 12^2$
$153 - 144 = x^2$
$x^2 = 9\ \Rightarrow\ x = \boxed{3\ m}$ **Rpta.**

11. Se tiene un plano "H" y un punto exterior "P", en el plano "H" se tiene un círculo cuyo radio mide 5,5 m, la distancia máxima del punto "P" a la circunferencia es de 20 m. Halllar la distancia mínima del punto "P" a la circunferencia. Sabiendo que la distancia del punto "P" al plano es de 12 m.

a) 11 m b) 12 m c) 13 m
d) 14 m e) 16 m

Resolución:



Dato: $PR = 20\ m$

$RO = OQ = 5{,}5\ m$ y $NP = 12\ m$.

Se pide $PQ = x$.

Por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo RPN:

$20^2 = (11+n)^2 + 12^2$

$400 - 144 = (11+n)^2$

$256 = (11+n)^2$

$16^2 = (11+n)^2 \ \rightarrow\ 16 - 11 = n$

De donde: $n = 5$

En el triángulo rectángulo QPN:

$x^2 = 5^2 + 12^2$

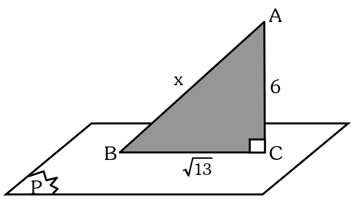
$x^2 = 169$

$x = \boxed{13\ m}$ **Rpta.**

12. El punto "A", se encuentra a 6 cm de un plano "P". Halla la distancia del punto "A" a otro punto "B" contenido en el plano "P", si la distancia de "B" al pie de la perpendicular trazada de A al plano mide $\sqrt{13}$cm .

a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt{33}$ c) 7
d) 8 e) 6

Resolución:



En el Δ rectángulo

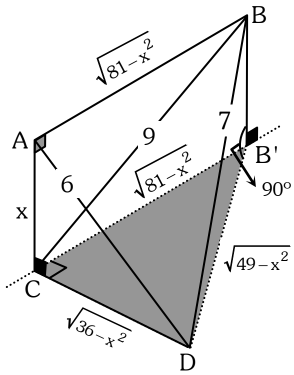
$x^2 = 6^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2$

$x^2 = 49 \ \Rightarrow\ x = \boxed{7}$ **Rpta.**

13. Se tiene dos segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ ortogonales y situados en diferentes planos, si: $AD = 6\ m$; $BC = 9\ m$ y $BD = 7\ m$, Calcular: AC.

a) $3\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{17}$ c) $4\sqrt{3}$
d) $6\sqrt{3}$ e) $7\sqrt{7}$

Resolución:



Se observa que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son ortogonales y alabeados, donde se considera a "x" como la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Luego se traza $\overleftrightarrow{CB'} // \overleftrightarrow{AB}$, entonces $DC \perp \overleftrightarrow{CB'}$

De esa manera se obtiene el triángulo rectángulo DCB' y aplicamos el teorema de Pitágoras:

$\left(\sqrt{49-x^2}\right)^2 = \left(\sqrt{81-x^2}\right)^2 + \left(\sqrt{36-x^2}\right)^2$

$49 - x^2 = 81 - x^2 + 36 - x^2$

$x^2 = 117 - 49$

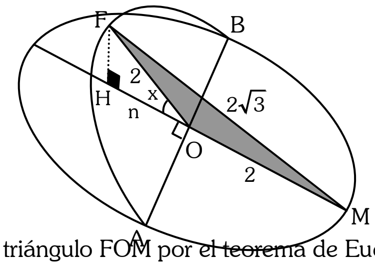
$x^2 = 68$

$x = \boxed{2\sqrt{17}\ m}$ **Rpta.**

14. Hallar la medida del ángulo diedro formado por los planos que contienen a la circunferencia y semicircunferencia mostrados cuyos radios son iguales y tienen por longitud 2 m, si: $m\,AF = m\,FB$; $m\,AM = m\,MB$ y $FM = 2\sqrt{3}\ m$.

a) 30º b) 45º c) 60º
d) 75º e) 80º

Resolución:



En el triángulo FOM por el teorema de Euclides:

$12 = 4 + 4 + 2(2)(n) \ \rightarrow\ n = 1$

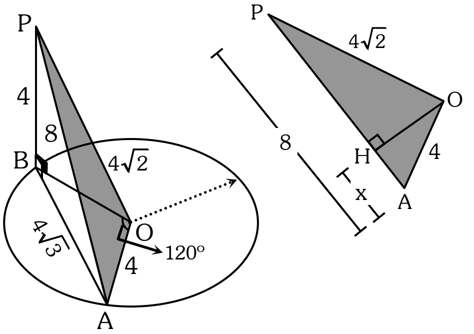
Luego el triángulo rectángulo FHO es notable de (30º–60º)

De donde: $x = \boxed{60^\circ}$ **Rpta.**

15. Sobre una circunferencia de centro "O" y radio cuya longitud es 4 m, se toman los puntos A y B, tal que: $mAB = 120^\circ$. Por B se levanta $\overline{BP}$, perpendicular al plano del círculo, siendo $BP = 4\ m$. Hallar el área de la región triángular AOP.

a) $3\sqrt{5}\ m^2$ b) $4\sqrt{7}\ m^2$ c) $8\sqrt{5}\ m^2$
d) $9\sqrt{5}\ m^2$ e) $3\sqrt{3}\ m^2$

Resolución:



Se observa que: $m\ AB = m\measuredangle AOB = 120^\circ$

En el Δ isosceles AOB: $AB = 4\sqrt{3}$

En el triángulo rectángulo PBA: $AP = 8$

En el Δ AOP ; para calcular el área es necesario, calcular "OH"

Por el teorema de Euclides:

$32 = 16 + 64 - 2(8)(x)$

De donde: $x = 3$

Luego en el triángulo rectángulo OHA, por el teorema de Pitágoras:

$OH^2 = 16 - 9 \Rightarrow OH = \sqrt{7}$

En consecuencia:

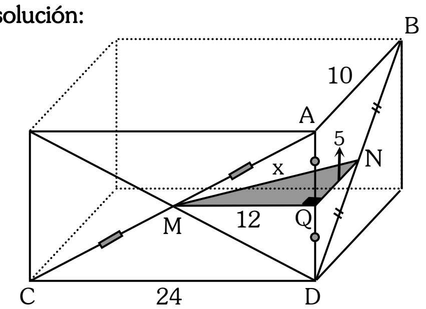
$$\text{Area } (\Delta \text{ AOP}) = \frac{(8)\left(\sqrt{7}\right)}{2}$$

$\boxed{4\sqrt{7}\ m^2}$ **Rpta.**

16. Se tienen los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se cruzan formando un ángulo recto. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, si $AB = 10$ m y $CD = 24$ m.

a) 12 m b) 13 m c) 14 m
d) 15 m e) 16 m

Resolución:



Se observa que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son alabeados.

Además: $AB = 10$ m y $CD = 24$ m

Se pide el valor de $MN = x$

Por el teorema de los puntos medios en los triángulos rectángulos CDA y BAD.

* $MQ = \frac{24}{2} = 12$

* $NQ = \frac{10}{2} = 5$

Luego en el triángulo rectángulo MQN:

$x^2 = 12^2 + 5^2$

$x = MN = \boxed{13\ m}$ **Rpta.**

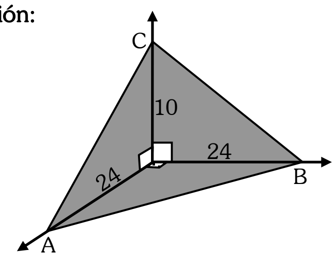
17. En un triedro trirrectángulo "P" sobre cada una de sus arista se toman los puntos A, B y C, donde $VA = VB = 24$ y $VC = 10$, hallar el perímetro del triángulo ABC

a) $4\left(13 + 6\sqrt{2}\right)$ b) $4\left(11 + 6\sqrt{2}\right)$

c) $2\left(13 + 5\sqrt{2}\right)$ d) $13 + 6\sqrt{2}$

e) $6\sqrt{2}$

Resolución:



* En los Δ rectángulos

Δ APC : $AC^2 = 10^2 + 24^2$

$AC = 26$

Δ CPB : $CB^2 = 10^2 + 24^2$

$CB = 26$

Δ APB : $AB^2 = 24^2 + 24^2$

$AB = 24\sqrt{2}$

* Luego:

Perímetro Δ ABC$= 26 + 26 + 24\sqrt{2}$

$= \boxed{4\left(13 + 6\sqrt{2}\right)}$ **Rpta.**