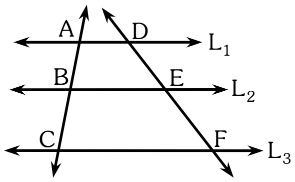
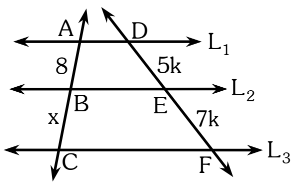
EJERCICIOS RESUELTOS DE PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

1.- En la figura, hallar BC, si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$, $AB = 8$ y $\dfrac{DF}{EF} = \dfrac{12}{7}$

a) 11,2
b) 12
c) 11
d) 10
e) 11,5



Solución:



- Por dato: $\dfrac{DF}{EF} = \dfrac{12}{7}$

$$\Rightarrow DF = 12k \quad y \quad EF = 7k$$

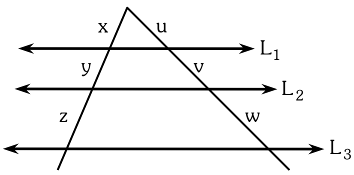
- Luego, por Thales:

$$\frac{8}{x} = \frac{5k}{7k}$$

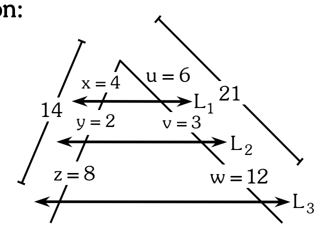
$\boxed{x = 11,2}$ Rpta.

2.- Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$, además $x + y + z = 14$, $u + v + w = 21$; $v - y = 1$; $w = 4v$. Hallar el valor de: $R = (4x + 3y + 4z) - (2u + 3v + 2w)$.

a) 10
b) 16
c) 8
d) 12
e) 9



Solución:



- Por Thales: $\dfrac{14}{21} = \dfrac{y}{v}$

$$\Rightarrow y = 2k \quad y \quad v = 3k$$

- Por dato: $v - y = 1$

$$3k - 2k = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 1}$$

- Luego: $\boxed{y = 2}$ $\boxed{v = 3}$
- Por dato: $w = 4v \quad \Rightarrow \boxed{w = 12}$
- Por Thales: $\dfrac{z}{12} = \dfrac{14}{21} \quad \Rightarrow \boxed{z = 8}$
- De la figura: $x = 14 - (2 + 8)$

$$\boxed{x = 4}$$

- De la figura: $u = 21 - (3 + 12)$

$$\boxed{u = 6}$$

- Nos piden:

$$R = (4x + 3y + 4z) - (2u + 3v + 2w)$$

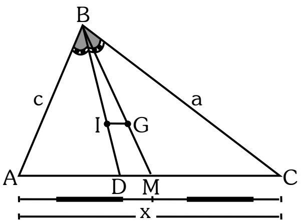
- Reemplazando y operando:

$\boxed{R = 9}$ Rpta.

3.- En un triángulo ABC se tiene que la suma de las longitudes de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ es 16m. Calcular la longitud del tercer lado sabiendo que dicho lado es paralelo al segmento que une el incentro con el baricentro.

a) 10 b) 16 c) 8
d) 12 e) 9

Solución:



- Si "G" es baricentro, $\Rightarrow$ $BG = 2(GM)$
- S"I" es incentro, entonces, por el Teorema del Incentro se tiene:

$$\frac{BI}{BD} = \frac{a+c}{b}$$

- Ya que $\overline{IG} // \overline{AC}$, aplicaremos el Teorema de Thales:

$$\frac{BI}{ID} = \frac{BG}{GM} \qquad \frac{a+c}{x} = 2 \ldots \text{(I)}$$

- Por dato: $a + c = 16 \ldots$ (II)
- De (I) y (II):

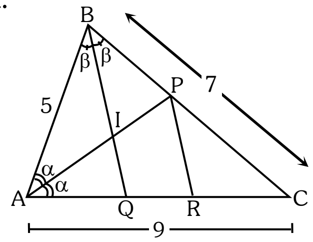
$\boxed{x = 8}$ Rpta.

4.- En un triángulo ABC se tiene que $AB = 5$, $BC = 7$ y $AC = 9$. Se trazan las bisectrices interiores $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$, luego por "P" se traza una recta paralela a la bisectriz $\overline{BQ}$, la cual intercepta al segmento $\overline{QC}$ en "R". Hallar QR.

a) $\frac{15}{8}$ b) $\frac{17}{8}$ c) $\frac{21}{8}$

d) 12 e) $\frac{13}{8}$

Solución:



- Por el Teorema del Incentro:

$$\frac{AI}{IP} = \frac{5+9}{7} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{AI}{IP} = 2 \ldots \text{(I)}$$

- Como $\overline{PR} // \overline{BQ}$ aplicaremos el Teorema de Thales:

$$\frac{AQ}{QR} = \frac{AI}{IP} \ldots \text{(II)}$$

- De (I) y (II)

$$\frac{AQ}{x} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad AQ = 2x \ldots \text{(III)}$$

- Aplicaremos el Teorema de la bisectriz:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AQ}{QC} \ldots \text{(IV)}$$

- De (III) y (IV): $\frac{5}{7} = \frac{2x}{9-2x}$

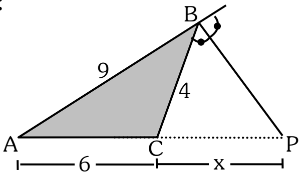
$\boxed{x = \frac{15}{8}}$ Rpta.

5.- En un triángulo ABC se tiene que $AB = 9$, $BC = 4$ y $AC = 6$. Se traza la bisectriz exterior $\overline{BP}$. Calcular CP.

a) 3,6 b) 5,4 c) 2,7

d) 1,8 e) 4,8

Solución:



- Por el Teorema de la bisectriz exterior:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{CP}$$

$$\frac{9}{6+x} = \frac{4}{x}$$

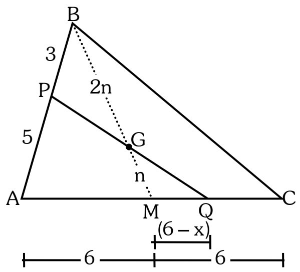
$\boxed{x = 4{,}8}$ Rpta.

6.- Por el baricentro de un triángulo ABC se traza una recta que corta a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P y Q respectivamente, tal que $AP = 5$ y $PB = 3$. Calcular CQ si $AC = 12$.

a) $\frac{15}{7}$ b) $\frac{17}{8}$ c) $\frac{12}{7}$

d) $\frac{24}{7}$ e) $\frac{13}{8}$

Solución:



- Como "G" es baricentro, aprovechamos esa condición y trazamos la mediana BM, luego:

$$BG = 2n \qquad y \qquad GM = n$$

- Aplicaremos el Teorema de Menelao en el ΔABM:

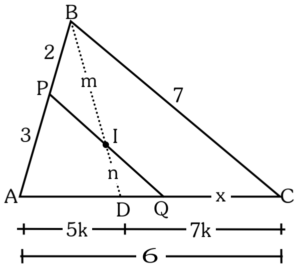
$$5 \cdot 2n \cdot (6-x) = 3 \cdot n \cdot (12-x)$$

$\boxed{x = \frac{24}{7}}$ Rpta.

7.- Por el incentro de un ΔABC se traza una recta que corta a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P y Q respectivamente, tal que $AP = 3$. Calcular CQ si $AB = 5$, $BC = 7$ y $AC = 6$.

a) 2,5 b) 5,25 c) 2,25
d) 1,25 e) 2,45

Solución:



- $\overline{BD}$ es bisectriz interior, entonces:

$$AD = 5k \quad y \quad DC = 7k$$

- De la figura: $5k + 7k = 6$

$$k = \frac{1}{2}$$

Luego: $AD = 2,5$ y $DC = 3,5$

- Por el Teorema del Incentro:

$$\frac{m}{n} = \frac{5+7}{6} \quad \Rightarrow \quad m = 2n$$

- Por el Teorema de Menelao en el ΔABD:

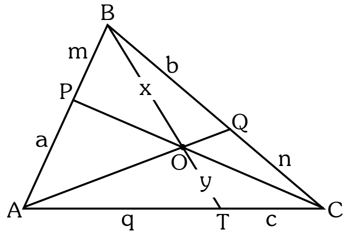
$$AP \cdot BI \cdot DQ = PB \cdot ID \cdot AQ$$
$$3 \cdot m \cdot (3,5 - x) = 2 \cdot n \cdot (6 - x)$$

$\boxed{x = 2,25}$ Rpta.

8.- En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{AQ}$, $\overline{BT}$ y $\overline{CP}$, todas ellas concurrentes en el punto "O". Calcular $\frac{BO}{OT}$ si además se conoce que $\frac{BP}{PA} + \frac{BQ}{QC} = \frac{3}{2}$.

a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{2}{9}$

Solución:



- Por dato: $\frac{m}{a} + \frac{b}{n} = \frac{3}{2}$
- Aplicaremos el Teorema de Menelao
- En el ΔABT: $a \cdot x \cdot c = m \cdot y \cdot (q + c)$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{a} = \frac{x \cdot c}{y \cdot (q+c)} \ \ldots \text{(I)}$$

- En el ΔBCT: $n \cdot x \cdot q = b \cdot y \cdot (q + c)$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{n} = \frac{x \cdot q}{y \cdot (q+c)} \ \ldots \text{(II)}$$

- Sumando (I) y (II):

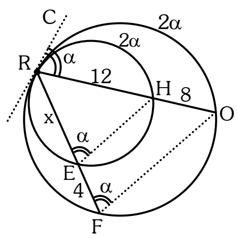
$$\frac{m}{a} + \frac{b}{n} = \frac{x \cdot c}{y \cdot (q+c)} + \frac{x \cdot q}{y \cdot (q+c)}$$
$$\frac{m}{a} + \frac{b}{n} = \frac{x}{y \cdot \cancel{(q+c)}} \cdot \cancel{(q+c)}$$

$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{3}{2}}$ Rpta.

9.- Se tienen dos circunferencias tangentes interiores en A, luego se trazan las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ en la circunferencia mayor que cortan a la circunferencia menor en B y E respectivamente. RE si $RH = 12$, $HO = 8$ y $EF = 4$.

a) 6 b) 4 c) 7
d) 12 e) 3

Solución:



- Trazamos la Tangente común, luego, si $m\sphericalangle CRH = \alpha$

$$\Rightarrow \ m\sphericalangle REH = m\sphericalangle RFO = \alpha$$

- Entonces tendremos:

$\boxed{\overline{EH} \, // \, \overline{FO}}$ (Propiedad)

- Finalmente, por Thales

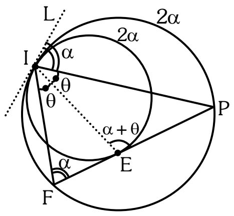
$$\frac{x}{4} = \frac{12}{8}$$

$\boxed{x = 6}$ Rpta.

10.- Dos circunferencias son tangentes interiores en el punto I. En la circunferencia mayor se traza la cuerda $\overline{FP}$ que es tangente a la otra circunferencia en el punto E. Calcular FE, si $FI = 7$, $IP = 9$ y $FP = 8$.

a) 3,6 b) 5,4 c) 2,7
d) 3,5 e) 4,8

Solución:



- Trazamos la Tangente común, luego, si $m\sphericalangle LIP = \alpha$

$$\Rightarrow m\sphericalangle IFP = \alpha$$

- Ahora, si $m\sphericalangle FIE = \theta$

$$\Rightarrow m\sphericalangle LIE = m\sphericalangle IEP = \alpha + \theta$$

- Entonces tendremos:

$\boxed{\overline{IE} \rightarrow \text{Bisectriz Interior del } \Delta FIP}$ (Propiedad)

- Finalmente, por el Teorema de la Bisectriz Interior:

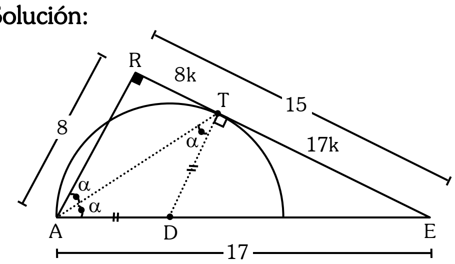
$$\frac{FI}{FE} = \frac{IP}{EP} \Rightarrow \frac{7}{FE} = \frac{9}{8-x}$$

$\boxed{x = 3{,}5}$ Rpta.

11.- En un triángulo rectángulo ARE se tiene que $AR = 8$ y $RE = 15$, se traza una semicircunferencia que tiene su centro en la hipotenusa del mencionado triángulo, pasa por A y es tangente a $\overline{BC}$ en el punto T. Calcular RT.

a) 3,6 b) 5,4 c) 2,7
d) 1,8 e) 4,8

Solución:



- Se puede ver que $\overline{DT} // \overline{AR}$ y como $AD = DT$, llegaremos ala conclusión que $\overline{AT}$ es bisectriz interior, luego:

$$RT = 8k \quad y \quad TE = 17k$$

- De la figura:

$$8k + 17k = 15 \quad \Rightarrow 25k = 15$$

$$\boxed{k = \frac{3}{5}}$$

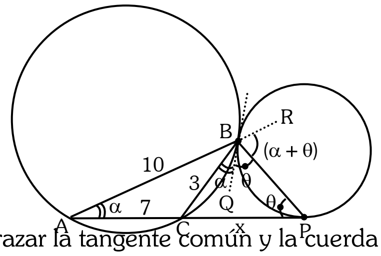
- Nos piden: $RT = 8k$

$\boxed{RT = 4{,}8}$ Rpta.

12.- Dos circunferencias son tangentes exteriores en el punto B. En una de las circunferencias se trazan las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de manera que la prolongación de $\overline{AC}$ es tangente a la otra circunferencia en el punto P. Hallar CP si $AB = 10$ $BC = 3$ y $AC = 8$.

a) $\frac{25}{7}$ b) $\frac{17}{7}$ c) $\frac{24}{7}$
d) $\frac{25}{8}$ e) $\frac{18}{7}$

Solución:



- Al trazar la tangente común y la cuerda $\overline{BP}$ se tendrá:

$$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle CBQ = \alpha$$

$$m\sphericalangle QBP = m\sphericalangle CPB = \theta$$

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle RBP = \alpha + \theta$$

- Luego, $\overline{BP}$ es bisectriz exterior del ΔABC, aplicaremos el Teorema de la Bisectriz Exterior:

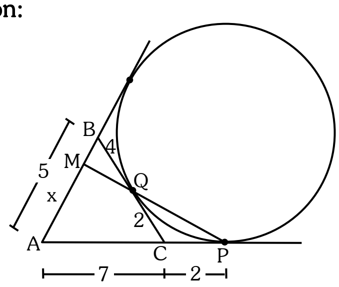
$$\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{CP} \quad \Rightarrow \frac{10}{8+x} = \frac{3}{x}$$

$\boxed{x = \frac{24}{7}}$ Rpta.

13.- En un triángulo ABC $AB = 5$, $BC = 6$ y $AC = 7$, la circunferencia ex inscrita relativa a $\overline{BC}$ lo corta en Q y a la prolongación de $\overline{AC}$ en P. Si $\overline{PQ}$ corta a $\overline{AB}$ en M, hallar AM.

a) $\frac{43}{15}$ b) $\frac{46}{13}$ c) $\frac{45}{13}$
d) $\frac{44}{13}$ e) $\frac{47}{13}$

Solución:



- Por teoría de circunferencias se sabe que:

$$AP = p_{\Delta ABC}$$

$$AP = 9$$

- Luego: $CP = 2$ y $BQ = 4$

- Aplicaremos el Teorema de Menelao:

$$AM \cdot BQ \cdot CP = MB \cdot QC \cdot AP$$

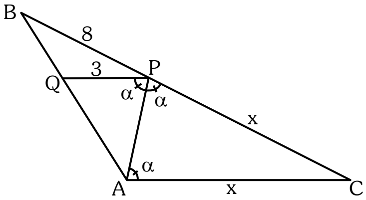
$$x \cdot 4 \cdot \cancel{2} = (5-x) \cdot \cancel{2} \cdot 9$$

$\boxed{x = \frac{45}{13}}$ Rpta.

14.- Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un ΔABC se ubican los puntos Q y P de modo que $\overline{QP}//\overline{AC}$ y $\overline{PA}$ es la bisectriz del $\measuredangle CPQ$. Hallar PC si $PQ=3$ y $PB=8$.

a) 3,6 b) 5,4 c) 3,6
d) 1,8 e) 4,8

Solución:



- Como $\overline{PQ}//\overline{AC}$ se tendrá:

$$\Delta ABC \sim \Delta BQP:$$

$$\frac{3}{x}=\frac{8}{8+x}$$

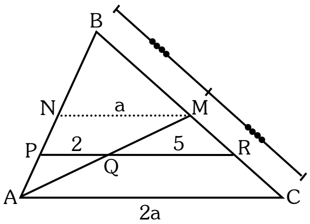
$\boxed{x=4,8}$ Rpta.

15.- En un ΔABC se traza una recta paralela a $\overline{AC}$ que corta a $\overline{AB}$ en P, a la mediana $\overline{AM}$ en Q y a $\overline{BC}$ en R. Hallar AC si $PQ=2$ y $QR=5$.

a) 10 b) 11 c) 12
d) 9 e) 8

Solución:

- Aprovechamos que $BM=MC$ y trazamos $\overline{MN}//\overline{AC}$, entonces: $MN=\dfrac{AC}{2}$



- De la figura, como $\overline{PR}//\overline{MN}//\overline{AC}$, se tendrá:

$\Delta AMC \sim \Delta QMR$: $\dfrac{AM}{QM}=\dfrac{2a}{5}$ … (I)

$\Delta ANM \sim \Delta APQ$: $\dfrac{AM}{QM}=\dfrac{2}{a}$ … (II)

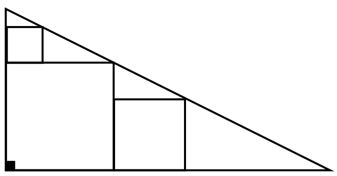
- De (I) y (II):

$\boxed{a=4,5}$

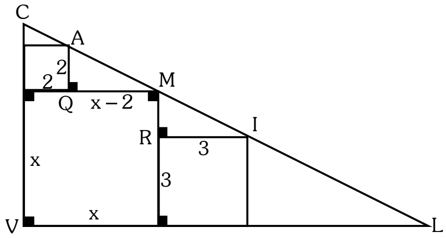
$\boxed{AC=9}$ Rpta.

16.- En la figura mostrada se pide hallar la longitud de lado del cuadrado mayor sabiendo que los lados de los cuadrados menores miden 2 y 3m.

a) 4
b) 5
c) 6
d) 5,5
e) 5,6



Solución:



- De la figurase deduce que:

$$\Delta AQM \sim \Delta MRI$$

$$\frac{2}{x-3}=\frac{x-2}{3}$$

$\boxed{x=5}$ Rpta.

17.- En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, luego se traza $\overline{DE}//\overline{AB}$ $(E\in\overline{BC})$. Si $DE=3$, $DC=6$ y $AC=11$, entonces la suma de las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del triángulo es:

a) 12 b) 12,1 c) 13,2
d) 14 e) 14,3

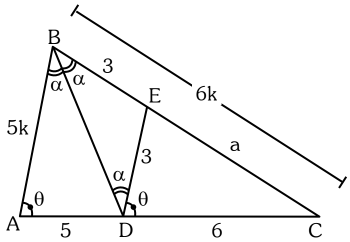
Solución:

- Por el Teorema de la Bisectriz Interior:

$$AB=5k \quad y \quad BC=6k$$

- Como $\overline{DE}//\overline{AB}$, aplicaremos el Teorema de Thales:

$$\frac{a}{3}=\frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a=3,6}$$



- De la figura: $6k=3+a$

$6k=3+3,6$

$\boxed{k=1,1}$

- Nos piden: $AB+BC=5k+6k$

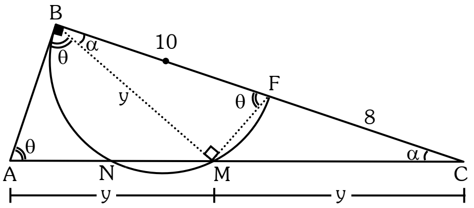
$AB+BC=11k$

$\boxed{AB+BC=12,1}$ Rpta.

18.- En un triángulo rectángulo ABC, en $\overline{BC}$ se traza una semicircunferencia de diámetro $BF=10$ la cual corta a la hipotenusa en los puntos M y N. Si $FC=8$ y $AM=MC$. Hallar AC.

a) $5\sqrt{14}$ b) $3\sqrt{15}$ c) $6\sqrt{15}$
d) $8\sqrt{10}$ e) $6\sqrt{10}$

Solución:



- Como $\overline{BF}$ es diámetro, trazamos $\overline{BM}$ y $\overline{MF}$

$$\Rightarrow \overline{BM} \perp \overline{MF}$$

- De la figura, $\overline{BM}$ será mediana

$$\Rightarrow BM = AM = MC = y$$

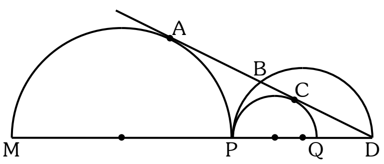
$\Delta BMF \sim \Delta ABC$: $\quad \dfrac{y}{18} = \dfrac{10}{2y}$

$$y = 3\sqrt{10}$$

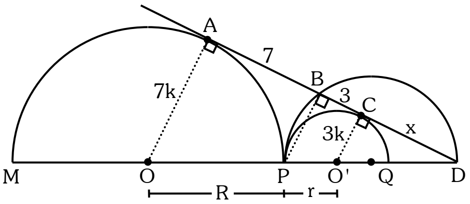
$\boxed{AC = 6\sqrt{10}}$ Rpta.

19.- En la figura mostrada, los puntos A y C son puntos de tangencia y los segmentos $\overline{MP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{PD}$ son diámetros de las semicircunferencias. Si $AB = 7$ y $BC = 3$. Halle CD.

a) 6,5
b) 5,6
c) 7,5
d) 6,0
e) 6,6



Solución:



- Como $\overline{OA} // \overline{PB} // \overline{O'C}$, aplicaremos el Teorema de Thales: $\quad \dfrac{r}{R} = \dfrac{3}{7}$

$$\Rightarrow r = 3k \quad y \quad R = 7k$$

- Ahora: $\quad \Delta OAD \sim \Delta O'CD$

$$\frac{x}{10+x} = \frac{3k}{7k}$$

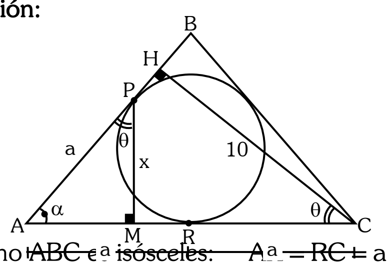
$$7x = 30 + 3x$$

$\boxed{x = 7,5}$ Rpta.

20.- Dado un triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$ en P. Por P se traza $\overline{PM} \perp \overline{AC}$; si la altura $\overline{CH}$ mide 10, entonces el valor de PM es:

a) 7 b) 6 c) 5
d) 4 e) 3

Solución:



- Como ABC es isósceles: AR = RC = a
- Por tangentes: AP = AR = a
- Por ángulos de lados perpendiculares:

$$m\sphericalangle MCH = m\sphericalangle HPM = \theta$$

- Luego: $\quad \Delta AHC \sim \Delta APM$

$$\frac{x}{10} = \frac{a}{2a}$$

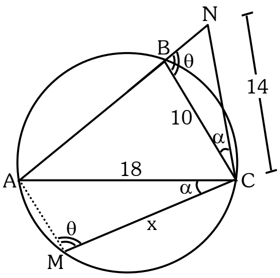
$\boxed{x = 5}$ Rpta.

21.- Un ΔABC está inscrito en una circunferencia. Por el vértice C se traza una secante a la prolongación de $\overline{AB}$ en N, en el arco AC se toma un punto M de modo que $m\sphericalangle ACM = m\sphericalangle BCN$. Si $AC = 18$, $BC = 10$ y $CN = 14$. Calcule CM.

a) $\dfrac{40}{7}$ b) $\dfrac{50}{7}$ c) $\dfrac{90}{7}$

d) $\dfrac{181}{14}$ e) $\dfrac{190}{14}$

Solución:



- Por dato $m\sphericalangle ACM = m\sphericalangle BCN = \alpha$
- Se puede observar que el cuadrilátero ABCM es inscriptible:

$$\Rightarrow m\sphericalangle AMC = m\sphericalangle NBC = \theta$$

- Luego:

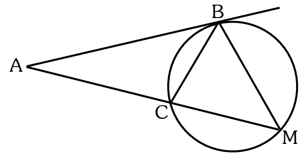
$$\Delta AMC \sim \Delta BNC$$

$$\frac{x}{10} = \frac{18}{14}$$

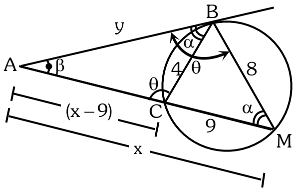
$\boxed{x = \dfrac{90}{7}}$ Rpta.

22.- En la figura mostrada, B es punto de tangencia. Si $BC = 4$, $BM = 8$ y $CM = 9$, entonces AM es:

a) 10
b) 18
c) 15
d) 20
e) 12



Solución:



- "Completando" ángulos, se verá que:

$\Delta ABM \sim \Delta ABC:$ $\qquad \dfrac{y}{x} = \dfrac{4}{8}$

$$\Rightarrow \; y = \frac{x}{2} \ldots \text{(I)}$$

$\Delta ABM \sim \Delta ABC:$ $\qquad \dfrac{y}{x} = \dfrac{x-9}{y}$

$$\Rightarrow \; y^2 = x(x-9) \ldots \text{(II)}$$

- (I) en (II):

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x(x-9)$$

- Resolviendo:

$\boxed{x = 12}$ Rpta.