EJERCICIOS RESUELTOS DE PROGRESIONES

1. Hallar el término que ocupa el lugar 15 de la siguiente P.A.

$$\div\ 12\ ,\ 8\ ,\ 4\ ,\ ....$$

a) 12 b) –40 c) –44
d) –48 e) –28

Resolución:
Del podemos extraer los datos siguientes:
- $r=8-12=-4$
- $n=15$
- $a_1=12$

→ Aplicando la formula: $a_n=a_1+(n-1)r$

$a_{15}=12+(15-1)(-4)$
$a_{15}=12+14(-4)$
$a_{15}=12-56$
$a_{15}=\boxed{-44}$ **Rpta.**

2. Hallar la suma de los "n" primeros números impares:

a) $(2n+1)^2$ b) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ c) $\left(\frac{1-n}{n}\right)^2$
d) $(n+1)^2$ e) n^2

Resolución:
→ Nos piden:

$$S=1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$$

→ Los sumandos son los términos de una P.A. donde:

$$a_1=1,\quad r=2,\ n=n$$

→ Aplicando la formula:

$$S=\frac{[2a_1+(n-1)r]\times n}{2}$$
$$S=\frac{[2(1)+(n-1)(2)]\times n}{2}$$
$$S=\frac{[2+2n-2]\times n}{2}$$
$$S=\frac{2n\cdot n}{2}$$
$$S=\boxed{n^2}\ \textbf{Rpta.}$$

3. La suma de los cuatro primeros términos de una P.A. es 20 y la razón 6. ¿Cuál es el primer término?

a) –2 b) –5 c) –4
d) 3 e) –10

Resolución:
→ De la lectura del problema:

$$S=20\quad ,\quad n=4\ ;\quad r=6$$

→ Aplicando la formula:

$$S=\frac{[2a_1+(n-1)r]}{2}$$
$$20=\frac{[2a_1+3\times 6]\cdot 4}{2}$$
$$20=(2a_1+18)\cdot 2$$
$$10=2a_1+18$$
$$-8=2a_1$$
$$a_1=\boxed{-4}\ \textbf{Rpta.}$$

4. La suma de los "n" primeros términos de una P.A. es 117, la razón 2 y el primer termino 5. Hallar el valor de "n".

a) 3 b) 4 c) 7
d) 9 e) 10

Resolución:
→ De la lectura del problema:

$$S=117,\ a_1=5,\ r=2,\ n=n$$

→ Reemplazando en la formula:

$$S=\frac{[2a_1+(n-1)r]}{2}$$
$$117=\frac{[2(5)+(n-1)\cdot 2]\times n}{2}$$
$$117=(5+n-1)n$$
$$117=(4+n)n$$
$$117=4n+n^2$$

→ Transponiendo términos:

$$n^2+4n-117=0$$
$$(n+13)(n-9)=0$$

→ Igualando cada factor a cero:
- $n+13=0 \quad\Rightarrow n=-13$
- $n-9=0 \quad\Rightarrow n=\boxed{9}$ **Rpta.**

5. Se han interpolado "m" medios diferenciales entre 4 y 18 y $m+2$, entre 10 y 24, de manera que la razón de la progresión formada en el primer caso será con la razón de la segunda en la relación $9/7$. Calcular el número de términos de cada una de las proposiciones:

a) 7 y 12 b) 10 y 8 c) 11 y 14
d) 12 y 13 e) $\frac{9}{7}$ y $\frac{7}{9}$

Resolución:

→ Datos:

$\div\ 4\ ,\underbrace{\qquad\qquad\qquad}\ ,\ 18\ ,\qquad r_1\ ;\ n_1 = m+2$

$\div\ 10\ ,\underbrace{\qquad\qquad\qquad}\ ,\ 24\ ,\qquad r_2\ ;\ n_2 = m+4$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{9}{7}$$

→ Por aplicación de la formula:

$$r = \frac{a_n - a_1}{m+1}$$

→ Para la 1ra P.A.:

$$r_1 = \frac{18-4}{m+1} = \frac{14}{m+1} \qquad \ldots\ldots(1)$$

→ Para la 2da P.A.:

$$r_2 = \frac{24-10}{m+3} = \frac{14}{m+3} \qquad \ldots\ldots(2)$$

→ Dividiendo $(1) \div (2)$:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\dfrac{14}{m+1}}{\dfrac{14}{m+3}} = \frac{9}{7}$$

$$\frac{m+3}{m+1} = \frac{9}{7}$$

$$7m + 21 = 9m + 9$$

$$12 = 2m \qquad \Rightarrow \qquad m = 6$$

→ Luego: $n_1 = 6+2 = 8$

$n_2 = 6+4 = 10$

$\therefore \quad n_1 = 8 \wedge n_2 = 10$

$\boxed{10 \text{ y } 8}$ **Rpta.**

7. En una P.A. de 15 términos, la suma de los términos es 360. ¿Cuál es el valor del término central?

a) 12 b) 16 c) 19
d) 21 e) 24

Resolución:

Sea "x" el término central de la P.A. de un número impar de términos, esto es igual a:

$$x = \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad \ldots\ldots(1)$$

→ Datos: $S = 360$; $n = 15$

→ Sustituyendo en la formula:

$$S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$$

$$360 = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times 15$$

$$\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) = 24 \qquad \ldots\ldots(2)$$

Reemplazando en (1):

$x = \boxed{24}$ **Rpta.**

8. Si la suma de "n" términos de una P.A. es $5n + 2n^2$, para todos los valores de "n", hallar el término de lugar 10.

a) 34 b) 38 c) 39
d) 41 e) 43

Resolución:

→ Para hallar el término de lugar 10, se debe conocer el "a_1" y "r".

→ Sea la P.A.:

$\div\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ldots\ldots,$ donde su suma

$S = 5n + 2n^2$, para todo valor de "n"

→ Si: $n = 1 \quad \Rightarrow S = a_1 = 5(1) + 2(1)^2$

$a_1 = 5 + 2$

$a_1 = 7$

→ Si: $n = 2 \Rightarrow \quad S = a_1 + a_2 = 5(2) + 2(2)^2$

$a_1 + a_2 = 10 + 8$

$a_1 + a_2 = 18$

→ Pero $a_1 = 7 \qquad 7 + a_2 = 18$

$a_2 = 11$

→ Y la razón: $r = a_2 - a_1$

$r = 11 - 7$

$r = 4$

→ Luego: $a_{10} = a_1 + 9r$

$a_{10} = 7 + 9 \cdot 4$

$a_{10} = \boxed{43}$ **Rpta.**

9. En una P.A. la razón y el número de términos son iguales. La suma los términos es 156 y la diferencia de los extremos es 30. Formar la progresión:

a) 35 b) 39 c) 41
d) 55 e) 62

Resolución:

→ De la lectura del problema.

$S = 156 \quad ; \quad r = n \quad ; \quad a_n - a_1 = 30$

→ Pero: $a_n = a_1 + (n-1)r = a_1 + (n-1)n$

→ Luego: $\left[a_1 + (n-1)n\right] - a_1 = 30$

$n^2 - n - 30 = 0$

$(n-6)(n+5) = 0$

→ Igualando cada factor a cero:

$n - 6 = 0 \longrightarrow n = 6$

$n + 5 = 0 \longrightarrow n = -5$

→ De donde: $n = r = 6$

→ Sustituyendo valores en la formula:

$$S=\frac{\left[2a_1+(n-1)r\right]\times n}{2}$$

→ Se obtiene: $156=\dfrac{\left[2a_1+30\right]6}{2}$

$$156=6a_1+90$$
$$66=6a_1$$
$$a_1=11$$

→ Entonces, la P.A. será:

$\div 11\ ,\ 17\ ,\ 23\ ,\ 29\ ,\ 35\ ,\ \boxed{41}$ **Rpta.**

10. Se sabe que el 3° y 6° término de una P.A. dan por suma 57, que el 5° con el 10° suman 99, ¿Cuáles son estos cuatro términos?

a) 67 b) 70 c) 73
d) 77 e) 80

Resolución:

→ De la lectura del problema:

$$a_3+a_6=57$$
$$a_5+a_{10}=99$$

→ De otro lado:

$$\left.\begin{array}{l}a_3=a_1+2r\\a_6=a_1+5r\end{array}\right\}(\alpha)$$

$$a_3+a_6=2a_1+7r=57 \qquad \cdots(1)$$

$$a_5=a_1+4r$$

También: $a_{10}=a_1+9r$

$$a_5+a_{10}=2a_1+13r=99 \qquad \cdots(2)$$

→ Restando $(2)-(1)$:

$$6r=42 \quad \Rightarrow \quad r=7$$

→ En (1): $2a_1+7\times 7=57$

$$2a_1=57-49$$
$$2a_1=8$$
$$a_1=4$$

→ Sustituyendo valores en (α)

- $a_3=4+2\times 7=18$
- $a_5=4+4\times 7=32$
- $a_6=4+5\times 7=39$
- $a_{10}=4+9\times 7=67$

→ Finalmente:

$\therefore\ a_3=18$, $a_5=32$, $a_6=39$, $a_{10}=\boxed{67}$ **Rpta.**

11. La suma de cuatro números racionales en una P.A. es 20 y la suma de sus inversos es $\dfrac{25}{24}$, Formar la progresión:

a) b) c)
d) e)

Resolución:

→ En este caso resulta conveniente escribir la P.A. de la siguiente forma:

$$\div\ (a-3r)\ ,\ (a-r)\ ,\ (a+r)\ ,\ (a+3r)$$

→ Por condición:

$$a-3r+a-r+a+r+a+3r=20$$
$$4a=20$$
$$a=5$$

→ Luego:

$$\div\ (5-3r)\ ,\ (5-r)\ ,\ (5+r)\ ,\ (5+3r) \qquad (\alpha)$$

→ También:

$$\frac{1}{5-3r}+\frac{1}{5-r}+\frac{1}{5+r}+\frac{1}{5+3r}=\frac{25}{24}\ \cdots(\phi)$$

→ Lo dividiremos en partes el primer miembro:

$$A=\frac{1}{5+r}+\frac{1}{5-r}=\frac{5-r+5+r}{(5+r)(5-r)}=\frac{10}{25-r^2}$$

$$B=\frac{1}{5+3r}+\frac{1}{5-3r}=\frac{5-3r+5+3r}{(5+3r)(5-3r)}=\frac{10}{\left(25-9r^2\right)}$$

→ Luego:

$$A+B=\frac{10}{25-r^2}+\frac{10}{25-9r^2}$$

$$A+B=\frac{10\left(25-9r^2\right)+10\left(25-r^2\right)}{\left(25-r^2\right)\left(25-9r^2\right)}$$

$$A+B=\frac{250-90r^2+250-10r^2}{625-250r^2+9r^4}$$

$$A+B=\frac{100\left(5-r^2\right)}{625-250r^2+9r^4}$$

→ Ahora Reemplazando en (ϕ)

$$\frac{100\left(5-r^2\right)}{625-250r^2+9r^4}=\frac{25}{24}$$

$$\frac{4\left(5-r^2\right)}{625-250r^2+9r^4}=\frac{1}{24}$$

$$480-96r^2=625-250r^2+9r^4$$
$$9r^4-154r^2+145=0$$
$$\left(9r^2-145\right)\left(r^2-1\right)=0$$

- $9r^2-145=0$

  $\Rightarrow\ r=\pm\sqrt{\dfrac{145}{9}}$ (Es irracional)

- $r^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad r=\pm 1$

→ En (1):

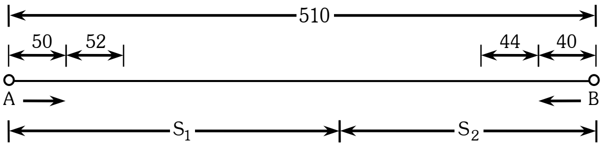
Para $r=1 \quad \Rightarrow \quad \div\ 2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8$

Para $r=-1 \quad \Rightarrow \div\ 8\ ,\ 6\ ,\ 4\ ,\ 2$

12. Desde los puntos A y B, distantes entre si 510 m. se mueve simultáneamente dos cuerpos, uno al encuentro del otro. El primero de ellos recorre en el primer minuto 50 m, y en cada minuto siguiente dos metros más que en el precedente. El segundo cuerpo recorre en el primer minuto 40 m. y en cada minuto siguiente 4 m, más que en el precedente. ¿Después de cuantos minutos se encuentran estos dos cuerpos?

a) 1 min b) 2 min c) 3 min
d) 4 min e) 5 min

Resolución:



→ Sea "x" el numero que tardan en encontrarse:
El primer cuerpo habrá recorrido:

$$S_1 = \frac{[2\times 50 + (x-1)\cdot 2]\cdot x}{2} = (50 + x - 1)x$$

$$S_2 = (49 + x)x$$

→ El segundo cuerpo habrá recorrido:

$$S_2 = \frac{[2\times 40 + (x-1)\cdot 4]\cdot x}{2} = [40 + 2(x-1)]x$$

$$S_2 = (38 + 2x)x$$

→ Los dos juntos habrán recorrido:

$$S_1 + S_2 = 510$$
$$(49 + x)x + (38 + 2x)x = 510$$
$$49x + x^2 + 38x + 2x^2 = 510$$
$$3x^2 + 87x - 510 = 0$$
$$x^2 + 29x - 170 = 0$$
$$(x + 34)(x - 5) = 0$$

→ Igualando cada factor a cero:

$x + 34 = 0 \Rightarrow x = -34$ (Absurdo)

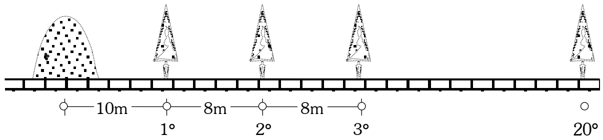
$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

$\therefore$ Se encuentran después de: $\boxed{5 \text{ min}}$ **Rpta.**

13. Un peón debe llevar una carretilla de arena al pie de cada uno de los 20 árboles que están al lado de una calzada; los árboles están a 8m, de distancia y el montón de arena está a 10 metros antes del primer árbol. ¿Qué camino habrá recorrido después de haber terminado su trabajo y vuelto la carretilla al montón de arena?

a) 3,440m b) 3,550m c) 3,660m
d) 3,770m e) 3,880m

Resolución:



El espacio que recorre para llevar la carretilla de arena desde el montón de arena a cada uno de los árboles es el mismo que el que recorre en su regreso, por lo cual, si S' es el espacio total de ida. S' Será también el espacio de regreso y el espacio total (de ida y vuelta).

$$S = 2S' \qquad \cdots(1)$$

→ El espacio recorrido del montón de arena al:
1er árbol es 10m
2do árbol es 18m
3er árbol es 24m
…………………..
…………………..

→ El espacio total recorrido en la ida será:
$S' = 10 + 18 + 24 + \cdots$

→ Los sumandos son términos de una P.A. de:
$a_1 = 10$, $r = 8$, $n = 20$

→ Luego: $S' = \frac{[2\times 10 + 19\times 8]}{2}\times 20$

$S' = (20 + 152)\cdot 10 \Rightarrow S' = 1{,}720$ m

→ El espacio total recorrido de ida y vuelta será:
$S = 2\times 1{,}720$

$\therefore S = \boxed{3{,}440 \text{ m}}$ **Rpta.**

15. Hallar el término que ocupa el lugar 12 de la siguiente P.G.

$$\div \frac{1}{128} : \frac{1}{64} : \frac{1}{32} : \cdots$$

a) 12 b) 15 c) 16
d) 20 e) 24

Resolución

→ De la lectura del problema: $t_1 = \frac{1}{128}$

→ Razón: $q = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{128}} = 2$

→ Número de términos: $n = 12$

→ Sustituyendo valores en: $t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$

→ Se tiene:

$$t_{12} = \frac{1}{128}\cdot 2^{11}$$
$$t_{12} = \frac{2^{11}}{2^7}$$
$$t_{12} = 2^4$$

$t_{12} = \boxed{16}$ **Rpta.**

16. Hallar el número de términos y la razón de una P.G. cuyo primer término es 7, el último es 567 y la suma de todos los términos 847.

a) 5 y 6 b) 5 y 3 c) 3 y 5
d) 2 y 7 e) 7 y 2

Resolución:

→ De la lectura del problema:

$$t_1 = 7 \ , \ t_n = 567 \, , \ S = 847$$

→ Sustituyendo los datos en: $S = \dfrac{t_n \cdot q - t_1}{q-1}$, se obtiene:

$$847 = \frac{567 \cdot q - 7}{q-1}$$

$$847q - 847 = 567q - 7$$

$$280q = 840 \ \Rightarrow q = 3$$

→ Sustituyendo valores en: $t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$, se obtiene:

$$567 = 7 \cdot 3^{n-1}$$

$$81 = 3^{n-1}$$

$$3^4 = 3^{n-1}$$

→ Igualando exponentes:

$$4 = n - 1$$

$$n = 5$$

$$\therefore \ n = 5 \ , \ q = 3$$

$\boxed{5 \text{ y } 3}$ **Rpta.**

17. En una progresión por cociente, se da el primer termino 4, la razón 0,2 y la suma de los términos 4,99968. Hallar el número de estos:

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

Resolución:

→ De la lectura del problema:

$$t_1 = 4 \, , \quad q = 0{,}2 \, , \ S = 4{,}99968$$

→ Sustituyendo los datos en: $S = \dfrac{t_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$, se obtiene: $4{,}99968 = \dfrac{4\left[(0{,}2)^n - 1\right]}{0{,}2 - 1}$

$$1{,}24992 = \frac{(0{,}2)^n - 1}{-0{,}8}$$

$$-0{,}8 \times 1{,}24992 = (0{,}2)^n - 1$$

$$-0{,}999936 = (0{,}2)^n - 1$$

$$1 - 0{,}999936 = (0{,}2)^n$$

$$0{,}000064 = (0{,}2)^n$$

$$(0{,}2)^6 = (0{,}2)^n$$

→ Igualando exponentes:

$n = \boxed{6}$ **Rpta.**

18. Formar una P.G. de 3 términos sabiendo que la suma de ellos es 157 y primer termino 1.

a) b) c)
d) e)

Resolución:

→ De la lectura del problema:

$$t_1 = 1 \, , \quad n = 3 \, , \quad S = 157$$

→ La P.G. será:

$$\div\div \ 1 \ : \ q \ : \ q^2 \ : \ \cdots\cdots \qquad \ldots..(\alpha)$$

→ Se requiere conocer la razón:

→ Sustituyendo valores en: $S = \dfrac{t_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$, se obtiene:

$$157 = \frac{1\left(q^3 - 1\right)}{q-1}$$

$$157 = \frac{(q-1)\left(q^2 + q + 1\right)}{q-1}$$

$$157 = q^2 + q + 1$$

$$q^2 + q - 156 = 0$$

$$(q+13)(q-12) = 0$$

→ Igualando cada factor a cero:

- $q + 13 = 0 \quad \Rightarrow q = -13$
- $q + 12 = 0 \quad \Rightarrow q = 12$

→ Reemplazando en (α), las progresiones serán:

Para $q = -13 \quad \Rightarrow \div\div \ 1 \ : \ -13 \ : \ 169$

Para $q = 12 \ \Rightarrow \div\div \ 1 \ : \ 12 \ : \ 144$

19. Interpolar 4 medios geométricos entre 5 y 5,120

a) b) c)
d) e)

Resolución:

→ De la lectura del problema:

$$t_1 = 5 \, , \quad t_n = 5{,}120 \, , \ m = 4$$

→ Aplicando la formula: $q = \sqrt[m+1]{\dfrac{t_n}{t_1}}$

$$q = \sqrt[5]{\frac{5{,}120}{5}}$$

$$q = \sqrt[5]{1024}$$

$$q = 2^2$$

$$q = 4$$

→ Luego la P.G. a formularse será:

$\div\div \ 5 \ : \ 20 \ : \ 80 \ : \ 320 \ : \ 1280 \ : \ 5120$ ***Rpta.***

20. Entre 4 y 5,184, y entre 5 y 405 se han interpolado el mismo número de medios proporcionales. Formar las dos progresiones de manera que, la razón de la primera sea el doble de la segunda.

a) b) c)

d) e)

Resolución:

→ De la lectura del problema:

$$\div\div\ 4 : \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{"m" medios}} : 5184,\quad q_1$$

$$\div\div\ 5 : \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{"m" medios}} : 405,\quad q_2$$

$$q_1 = 2q_2$$

→ Por aplicación de la formula:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

→ Para que la P.G.:

$$q_1 = \sqrt[m+1]{\frac{5184}{4}}$$

$$q_1 = \sqrt[m+1]{1296}$$

$$q_1 = \sqrt[m+1]{2^4 \times 3^4} \quad (\alpha)$$

→ Para la 2da P.G.:

$$q_2 = \sqrt[m+1]{\frac{405}{5}}$$

$$q_2 = \sqrt[m+1]{81}$$

$$q_2 = \sqrt[m+1]{3^4} \quad (\beta)$$

→ Por condición: $q_1 = 2q_2$

→ Es decir: $\sqrt[m+1]{2^4 \times 3^4} = 2\cdot\sqrt[m+1]{3^4}$

$$\sqrt[m+1]{2^4} \times \sqrt[m+1]{3^4} = 2\times\sqrt[m+1]{3^4}$$

$$\sqrt[m+1]{2^4} = 2$$

$$2^{\frac{4}{m+1}} = 2$$

→ Igualando exponentes:

$$\frac{4}{m+1} = 1$$

$$4 = m+1$$

$$m = 3$$

→ En (α): $q_1 = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} \Rightarrow q_1 = 6$

→ En (β): $q_2 = \sqrt[4]{3^4} \Rightarrow q_2 = 3$

→ Luego las dos progresiones serán:

$$\div\div\ 4 : 24 : 144 : 864 : 5184$$

$$\div\div\ 5 : 15 : 45 : 135 : 405$$

21. Hallar la suma de los infinitos términos de:

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \cdots\cdots$$

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{49}$ c) 7^{-3}

d) $\frac{3}{15}$ e) $\frac{3}{16}$

Resolución:

→ Agrupando en forma conveniente:

$$S = \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \cdots\cdots\right) + \left(\frac{2}{7^2} + \frac{2}{7^4} + \cdots\cdots\right)$$

→ Cada uno de los paréntesis es la suma de los infinitos términos de una P.G. de razón:

$$q = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49} < 1$$

→ Entonces apliquemos la formula: $\text{Lim } S = \frac{t_1}{1-q}$

$$\text{Lim } S = \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{49}} + \frac{\frac{2}{49}}{1-\frac{1}{49}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{48}{49}} + \frac{\frac{2}{49}}{\frac{48}{49}} = \frac{7}{48} + \frac{2}{48}$$

$$\text{Lim } S = \frac{9}{48}$$

→ Finalmente:

$$\text{Lim } S = \boxed{\frac{3}{16}}$$ **Rpta.**

22. Hallar la fracción generatriz del número $0,2\overline{18}$

a) $\frac{12}{17}$ b) $\frac{12}{55}$ c) $\frac{12}{57}$

d) $\frac{57}{12}$ e) $\frac{17}{12}$

Resolución:

→ El numero: $f = 0,21818\cdots\cdots$

→ Se puede escribir:

$$f = \frac{2}{10} + \frac{18}{10^3} + \frac{18}{10^5} + \cdots\cdots$$

$$f = \frac{2}{10} + \frac{18}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \cdots\cdots\right)$$

→ El paréntesis representa la suma de infinitos términos de una P.G. de:

$t_1 = 1$, $q = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100}$, luego:

$$f = \frac{2}{10} + \frac{18}{10^3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right)$$

$$f = \frac{2}{10} + \frac{18}{1000}\left(\frac{100}{99}\right)$$

$$f = \frac{2}{10} + \frac{18}{1000}\left(\frac{100}{99}\right)$$

$$f = \frac{1}{5} + \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{11}$$

$$f = \frac{11}{55} + \frac{1}{55}$$

$$f = \boxed{\frac{12}{55}}$$ **Rpta.**

23. El límite de la suma de los infinitos términos de una P.G. decreciente es el doble de la suma de sus "n" primeros términos. Hallar la razón.

a) $\dfrac{1}{2^n}$ b) $\dfrac{2^n+1}{2^n}$ c) $\sqrt[n]{2}$

d) $\sqrt[n+1]{\dfrac{1}{2}}$ e) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}$

Resolución:

→ De la lectura del problema:

$$\lim_{x\to\infty} S = 2S_n$$

→ Sabemos que:

$\text{Lim } S = \dfrac{t_1}{1-q}$, cuando $0 < q < 1$ y $n \longrightarrow \infty$

→ También:

$S_n = \dfrac{t_1(q^n - 1)}{q-1}$, cuando "n" es un número finito.

→ Cambiando de signo a los dos miembros de la fracción:

$$S_n = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}$$

→ Sustituyendo valores en el dato:

$$\frac{t_1}{1-q} = \frac{2t_1(1-q^n)}{1-q}$$

→ Simplificado: $(q<1)$:

$$1 = 2(1-q^n)$$

$$1 = 2 - 2q^n$$

$$2q^n = 1$$

$$q^n = \frac{1}{2}$$

$$q = \boxed{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}$$ **Rpta.**

24. El límite de la suma de los términos de una P.G. decreciente hasta el infinito es 9, y le segundo término. 2. Formar la progresión.

a) b) c)

d) e)

Resolución:

→ Sea la P.G. decreciente limitada:

$$\div\div\ t_1 : t_1\cdot q : t_1\cdot q^2 : \cdots\cdots$$

→ Por condición:

- $\text{Lim } S = \dfrac{t_1}{1-q} = 9$ $\cdots\cdots(1)$
- $t_2 = t_1 q = 2$ $\cdots\cdots(2)$

→ Dividiendo $(1)\div(2)$, se obtiene:

$$\frac{\frac{t_1}{1-q}}{t_1\cdot q} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{q(1-q)} = \frac{9}{2}$$

$$2 = 9q - 9q^2$$

$$9q^2 - 9q + 2 = 0$$

$$(3q-2)(3q-1) = 0$$

→ Igualando cada factor a cero:

- $3q - 2 = 0 \quad \Rightarrow q = \dfrac{2}{3}$
- $3q - 1 = 0 \quad \Rightarrow q = \dfrac{1}{3}$

→ En (2):

Para $q = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{2}{3}t_1 = 2 \quad \Rightarrow t_1 = 3$

Para $q = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{3}t_1 = 2 \quad \Rightarrow t_1 = 6$

→ Luego las progresiones serán:

$$\div\div\ 3 : 2 : \frac{4}{3} : \cdots\cdots$$

$$\div\div\ 6 : 2 : \frac{2}{3} : \cdots\cdots$$

25. Si $x < 1$, calcular el límite de la suma de la serie indefinida:

$$1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots\cdots$$

a) $\dfrac{1+x}{1-x}$ b) $\dfrac{1-x}{1+x}$ c) $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

d) $\dfrac{(1+x)^2}{1-x^2}$ e) $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$

Resolución:

→ Sea:

$$S=1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots\cdots \qquad ...(1)$$

→ Multiplicando por "x":

$$xS=x+3x^2+5x^3+7x^4+9x^5+\cdots\cdots \qquad ...(2)$$

→ Restando $(1)-(2)$, se obtiene:

$$S-xS=1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\cdots\cdots$$

$$(1-x)S=1+2x\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)$$

→ El paréntesis del segundo miembro es la suma de los infinitos términos de una P.G. de $t_1=1$, $q=x<1$.

→ Luego:

$$(1-x)S=1+2x\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$(1-x)S=1+\frac{2x}{1-x}$$

$$(1-x)S=\frac{1+x}{1-x}$$

$$S=\boxed{\frac{1+x}{(1-x)^2}}$$ **Rpta.**

26. Calcular la suma de la serie indefinida:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{16}+\frac{15}{64}+\frac{31}{256}+\cdots$$

a) $\dfrac{7}{3}$ b) $\dfrac{12}{7}$ c) $\dfrac{5}{3}$

d) $\dfrac{11}{4}$ e) $\dfrac{5}{6}$

Resolución:

→ Sea: $S=\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{16}+\dfrac{15}{64}+\dfrac{31}{256}+\cdots$

→ Los sumandos provienen de:

$$\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{16}=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}$$

$$\frac{15}{64}=\frac{1}{4}-\frac{1}{64}$$

$$\frac{31}{256}=\frac{1}{8}-\frac{1}{256}$$

→ Entonces:

$$S=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{62}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{256}\right)+\cdots$$

→ Agrupando los términos positivos y negativos entre si:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots\right)$$

$$S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\right)$$

→ Cada paréntesis representa la suma de los infinitos términos de una P.G. decreciente, entonces:

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$S=\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}$$

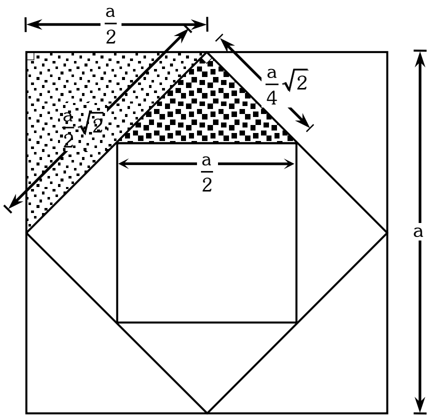
$$S=2-\frac{1}{3}\Rightarrow\ \therefore\ S=\boxed{\frac{5}{3}}$$ **Rpta.**

27. En un cuadrado cuyo lado es "a" se unen los puntos medios de los cuatro lados y se forma otro cuadrado cuyos puntos medios se unen también para formar un nuevo cuadrado a así sucesivamente. Encontrar el límite de la suma de las áreas de todos los cuadrados.

a) a^2 b) $2a^2$ c) $3a^2$

d) $4a^2$ e) $5a^2$

Resolución:



→ En un rectángulo isósceles, si un cateto es "x", la hipotenusa es $x\sqrt{2}$

→ Del grafico:

	Lado	**Área**
1° cuadrado	a	a^2
2° cuadrado	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a^2 \times 2}{4} = \frac{a^2}{2}$
3° cuadrado	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2}{4}$

....

....

→ La suma de las áreas de los cuadrados será:

$$S = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \cdots\cdots$$

→ Los infinitos sumandos son los términos de una P.G., donde:

$t_1 = a^2$, $\quad q = \frac{1}{2}$, luego:

$$\text{Lim } S = \frac{a^2}{a - \frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}}$$

Lim S = $\boxed{2a^2}$ **Rpta.**

28. En una P.G. de tres términos, la suma de ellos es 248 y su producto 64000. Escribir la progresión.

a) b) c)
d) e)

Resolución:

→ Sea la P.G.: $\div\div \frac{t}{q} : t : tq \quad \cdots\text{(I)}$

→ Por condición:

1° $\quad \frac{t}{q} \cdot t \cdot tq = 64000$

$$t^3 = 64000$$
$$t = 40$$

2° $\quad \frac{t}{q} + t + tq = 248$

$$t\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 248$$

$$40\left(\frac{1+q+q^2}{q}\right) = 248$$

$$5\left(1+q+q^2\right) = 31q$$

$$5 + 5q + 5q^2 = 31q$$

$$5q^2 - 26q + 5 = 0$$

$$(5q-1)(q-5) = 0$$

→ Igualando cada factor a cero:

$5q - 1 = 0 \quad \Rightarrow q = \frac{1}{5}$

$q - 5 = 0 \Rightarrow q = 5$

→ Sustituyendo valor es (I):

Para $t = 40$, $q = \frac{1}{5}$ $\quad \Rightarrow \quad \div\div 200 : 40 : 8$

Para $t = 40$, $q = 5$ $\quad \Rightarrow \quad \div\div 8 : 40 : 200$

29. En una P.G. de cuatro términos, el producto de ellos es 4096 y el tercer termino 16. Escribir la progresión:

a) b) c)
d) e)

Resolución

→ Sea la P.G.:

$\div\div \frac{t}{q^3} : \frac{t}{q} : tq : tq^3 \quad \cdots\cdots\text{(I)}$

→ Por la condición:

1° $\quad \frac{t}{q^3} \cdot \frac{t}{q} \cdot tq \cdot tq^3 = 4096$

$$t^4 = 2^{12}$$

$$t^4 - 2^{12} = 0$$

$$\left(t^2 + 2^6\right)\left(t^2 - 2^6\right) = 0$$

$$\left(t^2 - 2^6(-1)\right)\left(t + 2^3\right)\left(t - 2^3\right) = 0$$

→ Pero: $-1 = i^2$

$$\left(t^2 - 64i^2\right)(t+8)(t-8) = 0$$

$$(t+8i)(t-8i)(t+8)(t-8) = 0$$

→ Igualando cada factor a cero:

- $t+8i = 0 \Rightarrow \ t = -8i$
- $t-8i = 0 \Rightarrow \ t = 8i$
- $t+8 = 0 \ \Rightarrow \ t = -8$
- $t-8 = 0 \ \Rightarrow \ t = 8$

2° $tq = 16 \qquad (II)$

En (II):

- Para $t_1 = -8i \qquad \Rightarrow \qquad q_1 = 2i$
- Para $t_2 = 8i \qquad \Rightarrow \qquad q_2 = -2i$
- Para $t_1 = -8 \qquad \Rightarrow \qquad q_1 = -2$
- Para $t_2 = 8 \qquad \Rightarrow \qquad q_2 = 2$

→ Sustituyendo estos pares de valores en (I), se obtienen las progresiones:

$\div\div\ 1 \ : \ -4 \ : \ 16 \ : \ -64$

$\div\div\ 1 \ : \ -4 \ : \ 16 \ : \ -64$

$\div\div\ 1 \ : \ 4 \ : \ 16 \ : \ 64$

$\div\div\ 1 \ : \ 4 \ : \ 16 \ : \ 64$

→ Existen sólo dos progresiones diferentes:

$\div\div\ 1 \ : \ -4 \ : \ 16 \ : \ -64$

$\div\div\ 1 \ : \ 4 \ : \ 16 \ : \ 64$