EJERCICIOS RESUELTOS DE PRODUCTOS NOTABLES

1. Simplificar:

$$E=\frac{3(x-1)^2+(3x+1)^2}{1+3x^2}\ ;\ x\in\mathbb{R}$$

a) x b) 2 c) 4
d) $x+1$ e) 0

Resolución:

→ Aplicando cuadrado de un binomio

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

→ Obtenemos:

$$E=\frac{3(x^2-2x+1)+(9x^2+6x+1)}{1+3x^2}$$

$$E=\frac{3x^2-\cancel{6x}+3+9x^2+\cancel{6x}+1}{1+3x^2}$$

$$E=\frac{12x^2+4}{1+3x^2}=\frac{4\cancel{(3x^2+1)}}{\cancel{(1+3x^2)}}$$

$$E=\boxed{4}\ \textbf{Rpta.}$$

2. Hallar el valor de:

$$P=\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^5+41\right]$$

a) 54 b) 56 c) 58
d) 60 e) 64

Resolución:

→ La expresión dada se puede escribir de la manera siguiente:

$$P=\sqrt{2}\left[\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right]^2\left(\sqrt{2}-1\right)+41\right]$$

$$P=\left[\left[\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}+1^2\right]^2\left(\sqrt{2}-1\right)+41\right]$$

$$P=\sqrt{2}\left[\left[3-2\sqrt{2}\right]^2\left(\sqrt{2}-1\right)+41\right]$$

$$P=\left[\left[3^2-2(3)\left(2\sqrt{2}\right)+\left(2\sqrt{2}\right)^2\right]\left(\sqrt{2}-1\right)+41\right]$$

$$P=\sqrt{2}\left[\left[9-12\sqrt{2}+8\right]\left(\sqrt{2}-1\right)+41\right]$$

$$P=\sqrt{2}\left[\left[17-12\sqrt{2}\right]\left(\sqrt{2}-1\right)+41\right]$$

$$P=\sqrt{2}\left[\left[17\sqrt{2}-17-\underbrace{12\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}_{24}+12\sqrt{2}\right]+41\right]$$

$$P=\sqrt{2}\left[29\sqrt{2}-41+41\right]=\sqrt{2}\left[29\sqrt{2}\right]$$

$$P=29\cdot\sqrt{2}^2=29\cdot 2$$

$$P=\boxed{58}\ \textbf{Rpta.}$$

3. Si: $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=5$

Entonces el valor de x^3+x^{-3} es:

a) $\sqrt{5}$ b) 0 c) 25
d) $2\sqrt{5}$ e) $\dfrac{1}{5}$

Resolución:

→ Dato: $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$

→ Elevando al cubo a ambos miembros:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=\left(\sqrt{5}\right)^3$$

→ Luego sabemos que:

$$\boxed{(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)}$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{\sqrt{5}}=5\sqrt{5}$$

$$x^3+x^{-3}+3\sqrt{5}=5\sqrt{5}$$

$$\therefore\ x^3+x^{-3}=\boxed{2\sqrt{5}}\ \textbf{Rpta.}$$

4. Efectuar:

$$1+3\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)$$

a) 2^8 b) 2^9 c) 4^{16}
d) 4^{12} e) 16^4

Resolución:

$\rightarrow$ Como: $3=\left(2^2-1\right)$, entonces:

$$1+\underbrace{\left(2^2-1\right)\left(2^2+1\right)}_{2^4-1}\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)$$

$$1+\underbrace{\left(2^4-1\right)\left(2^4+1\right)}_{2^8-1}\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)$$

$$1+\underbrace{\left(2^8-1\right)\left(2^8+1\right)}_{2^{16}-1}\left(2^{16}+1\right)$$

$$1+\underbrace{\left(2^{16}-1\right)\left(2^{16}+1\right)}_{2^{32}-1}$$

$$\therefore\quad 2^{32}<>\left(2^2\right)^{16}=\boxed{4^{16}}\ \textbf{Rpta.}$$

5. Si $a+b=7$; $ab=5$
Calcular:

$$a^2+b^2$$

a) 36 b) 39 c) 32
d) 42 e) 48

Resolución:

$\rightarrow$ Dato: $a+b=7$
Elevando al cuadrado a ambos miembros:

$$(a+b)^2=(7)^2$$

$\rightarrow$ Sabemos que:

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

$$a^2+2ab+b^2=49$$

$$a^2+b^2+2\underbrace{ab}_{5}=49$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=\boxed{39}\ \textbf{Rpta.}$$

6. Hallar "n":

$$\left(3^n-1\right)\left(1+3^n+9^n\right)=728$$

a) 2 b) 1 c) 4
d) 1/2 e) 1/4

Resolución:

$\rightarrow$ Antes de resolver debes recordar el teorema de:

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$$

$\rightarrow$ Entonces, acomodando la expresión podemos aplicar el teorema:

$$\left(3^n-1\right)\left[\left(3^n\right)^2+3^n+1\right]=728$$

$$\underbrace{\left(3^n-1\right)\left[\left(3^n\right)^2+3^n+1\right]}_{3^{3n}-1}=728$$

$$3^{3n}-1=728$$

$$3^{3n}=729$$

$\rightarrow$ Buscando bases iguales:

$$3^{3n}=3^6\quad\Rightarrow\quad 3n=6$$

$$n=\boxed{2}\ \textbf{Rpta.}$$

7. Si:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{8}{2x+y}$$

Evaluar:

$$F=\frac{y^2+x^2+3xy}{(y-x)^2+(x+y)^2}$$

a) $\frac{10}{11}$ b) $\frac{11}{10}$ c) $\frac{4}{9}$
d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{1}{9}$

Resolución:

$\rightarrow$ En la condición:

$$\frac{y+2x}{xy}=\frac{8}{2x+y}$$

$$(2x+y)^2=8xy$$

$$4x^2+4xy+y^2=8xy$$

$$\underbrace{4x^2-4xy+y^2}_{\text{T.C.P.}}=0$$

$$(2x-y)^2=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{2x=y}$$

$\rightarrow$ En "F", reemplazamos:

$$F=\frac{(2x)^2+x^2+3x(2x)}{(2x-x)^2+(x+2x)^2}$$

$$F=\frac{4x^2+x^2+6x^2}{x^2+9x^2}$$

$$F=\frac{11x^2}{10x^2}\Rightarrow F=\boxed{\frac{11}{10}}\ \textbf{Rpta.}$$

8. Si: $a=\frac{1}{b}$

Calcular:

$$C=a\left(\frac{b^4+1}{b^3+a}\right)+b\left(\frac{a^4+1}{a^3+b}\right)$$

a) 3 b) 2 c) 0
d) -3 e) 1

Resolución:

→ De la condición:

$$\boxed{a=\frac{1}{b}} \quad ; \quad \boxed{b=\frac{1}{a}} \quad y \quad \boxed{ab=1}$$

→ Reemplazando en "F"

$$F=a\left(\frac{b^4+1}{b^3+\frac{1}{b}}\right)+b\left(\frac{a^4+1}{a^3+\frac{1}{a}}\right)$$

$$F=a\left(\frac{b^4+1}{\frac{b^4+1}{b}}\right)+b\left(\frac{a^4+1}{\frac{a^4+1}{a}}\right)$$

→ Simplificando:

$$F=ab+ba=2ab$$

$F=\boxed{2}$ **Rpta.**

9. Si: $(a+b+c+d)^2=4(a+b)(c+d)$

Hallar:

$$M=\sqrt[3(a+b)]{(343)^{c+d}}$$

a) 7 b) 8 c) 343
d) 12 e) 49

Resolución:

→ Haremos un cambio de variable:

"$a+b=x$" y "$c+d=y$"

→ Reemplazando en la condición:

$$(x+y)^2=4xy$$

$$x^2+2xy+y^2=4xy$$

$$\underbrace{x^2-2xy+y^2}_{T.C.P}=0$$

$$(x-y)^2=0$$

$$x=y \Rightarrow \text{"}\boxed{a+b=c+d}\text{"}$$

→ Ahora en lo que nos piden:

$$M=\sqrt[3(a+b)]{(343)^{a+b}}$$

$M=\sqrt[3]{343} \quad \Rightarrow \quad M=\boxed{7}$ **Rpta.**

10. Simplificar:

$$C=\left[\frac{(a^2-b^2+2ab)^2+(a^2-b^2-2ab)^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

a) a^2-b^2 b) a^2 c) $(a+b)^2$
d) a^2+b^2 e) b^2

Resolución:

→ Haciendo un cambio de variable:

$$\boxed{a^2-b^2=x} \quad ; \quad \boxed{2ab=y}$$

→ Reemplazando en "C"

$$C=\left[\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

→ En la expresión, podemos reducir el numerador por la ***Identidad de Legendre:***

$$\boxed{(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)}$$

$$C=\left[\frac{2(x^2+y^2)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

→ Ahora podríamos calcular:

- $x^2=a^4-2a^2b^2+b^4$
- $y^2=4a^2b^2$

→ De donde:

- $x^2+y^2=a^4+2a^2b^2+b^4$

$x^2+y^2=(a^2+b^2)^2$

→ Reemplazando en "C"

$C=\sqrt{(a^2+b^2)^2}=\boxed{a^2+b^2}$ **Rpta.**

11. Si: $a+b+c=0$

Calcular:

$$E=\frac{-a^2-b^2-c^2}{ab+ac+bc}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

Resolución:

→ Igualdad condicional:

$a+b+c=0$

→ De donde:

$a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc)$ ***(Véase P. Notables)***

→ En "E"

$$E=-\frac{(a^2+b^2+c^2)}{ab+ac+bc}$$

$$E=-\frac{-2(ab+ac+bc)}{ab+ac+bc}$$

→ Simplificando: $E=\boxed{2}$ **Rpta.**

12. Si: $x^{1998}+x^{-1998}=1022$

Calcular:

$$P=\sqrt[5]{x^{999}+x^{-999}}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 10

Resolución:

→ En la condición podemos completar a cuadrados, y tal enunciado lo lograremos agregando 2 a ambos miembros de la ecuación:

$$\underbrace{x^{1998}+2+x^{-1998}}_{T.C.P.}=1022+2$$

$$(x^{999}+x^{-999})^2=1024$$

$$\boxed{x^{999}+x^{-999}=32}$$

→ Luego piden:

$\sqrt[5]{x^{999}+x^{-999}}=\sqrt[5]{32}=\boxed{2}$ **Rpta.**

13. Si:

$$a+b+c=20$$
$$a^2+b^2+c^2=300$$

Hallar:

$$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$$

a) 100 b) 300 c) 500
d) 700 e) 900

Resolución:

→ Efectuando en:

$$a^2+2ab+b^2+a^2+2ac+c^2+b^2+2bc+c^2$$
$$a^2+b^2+c^2+\underbrace{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)}_{\text{Desarrollo de Trinomio al cuadrado}}$$
$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2$$

→ Reemplazando las condiciones:

$$300+20^2=\boxed{700}$$ **Rpta.**

14. Si:

$$A=x^4-1$$
$$B=\sqrt[10]{(x+1)^3(x-1)^3\left(x^2-1\right)^5\left(x^2+1\right)^8\left(x^4-1\right)^2}$$

Encontrar el valor de: "$A-B$"

a) 4 b) x c) 2
d) x^4 e) 0

Resolución:

→ Reduciendo "B":

→ Primero agrupando convenientemente:

$$B=\sqrt[10]{\underbrace{[(x+1)(x-1)]^3}\left(x^2-1\right)^5\left(x^2+1\right)^8\left(x^4-1\right)^2}$$
$$\underbrace{\left(x^2-1\right)^3\left(x^2-1\right)^5}\left(x^2+1\right)^8\left(x^4-1\right)^2$$
$$\underbrace{\left(x^2-1\right)^8\left(x^2+1\right)^8}\left(x^4-1\right)^2$$
$$\underbrace{\left(x^4-1\right)^8\left(x^4-1\right)^2}$$
$$\left(x^4-1\right)^{10}$$
$$B=\sqrt[10]{\left(x^4-1\right)^{10}}$$
$$\boxed{B=x^4-1}$$

→ Nos piden: $A-B=\left(x^4+1\right)-\left(x^4-1\right)$

$$\Rightarrow A-B=\boxed{2}$$ **Rpta.**

15. Si:

$$P=(a+b+c+d)(a-c+b-d)$$
$$Q=(a-b+c+d)(a-b-d-c)$$

Hallar: $H=\dfrac{P-Q}{4}$

a) 1 b) ab c) cd
d) a^2+b^2 e) abcd

Resolución:

→ Realicemos un cambio de variable:

$\boxed{a+b=x}$; $\boxed{c+d=y}$; $\boxed{a-b=m}$

→ Remplacemos en "P" y "Q"

- $P=(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
- $Q=(m+y)(m-y)=m^2-y^2$

→ Se pide:

$$H=\frac{\left(x^2-y^2\right)-\left(m^2-y^2\right)}{4}=\frac{x^2-m^2}{4}$$

→ Restaurando los valores de "x" e "m"

$$H=\frac{\overbrace{(a+b)^2-(a-b)^2}^{\text{Legendre}}}{4}=\frac{4ab}{4}$$
$$H=\boxed{ab}$$ **Rpta.**

16. Teniendo en cuenta que:

$$a+b=2ab=1$$

Calcular:

$$R=\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$$

a) 0 b) -1 c) 1
d) $\frac{1}{2}$ e) -2

Resolución:

→ De la condición:

$$a+b=1 \quad \cdots(\alpha)$$

→ Elevemos al cuadrado a ambos miembros:

$$(a+b)^2=1^2$$
$$a^2+2ab+b^2=1 \qquad \textbf{Nota: } \boxed{2ab=1}$$
$$a^2+1+b^2=1$$
$$a^2+b^2=0 \quad \cdots(\text{I}) \Rightarrow a=0 \qquad b=0$$

→ Nuevamente elevando al cuadrado:

$$a^4+2a^2b^2+b^4=0$$
$$a^4+b^4+2(ab)^2=0$$
$$a^4+b^4=-\frac{1}{2} \quad \cdots(\text{II})$$

→ En "α" ahora elevemos al cubo:

$$(a+b)^3=1^3$$
$$a^3+b^3+3ab(a+b)=1$$
$$a^3+b^3+3\left(\frac{1}{2}\right)(1)=1$$
$$a^3+b^3=-\frac{1}{2} \cdots(\text{III})$$

→ Reemplazando "II" y "III" en R

$$R=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=\boxed{1}$$ **Rpta.**

17. Reducir:

$$J=(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)(x^4-1)$$

a) x^6+1 b) x^6-x^3+1

c) $x^{12}+x^4-1$ d) $x^{15}-x^7+1$

e) $x^{12}-1$

Resolución:

→ Efectuando los dos primeros trinomios por Argand.

$$J=\underbrace{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}(x^4-x^2+1)(x^4-1)$$

$$J=\underbrace{(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)}(x^4-1)$$

→ Análogamente:

$$J=\underbrace{(x^8+x^4+1)(x^4-1)}_{\text{Diferencia de cubos}}=(x^4)^3-1^3$$

$J=\boxed{x^{12}-1}$ **Rpta.**

Vamos a resolver por:

→ Podemos desdoblar: (x^4-1) como:

$$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

→ Reemplazando en la expresión:

$$J=(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

→ Agrupando y efectuando la forma indicada:

$$J=(x^3+1)(x^3-1)(x^6+1)$$

$$J=(x^6-1)(x^6+1)$$

$J=\boxed{x^{12}-1}$ **Rpta.**

18. Si: $\dfrac{x-z}{z-y}+\dfrac{z^2}{(x+y)(z-y)}=1$

Hallar: $M=\left(\dfrac{z-x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x+y}{z}\right)^2+\left(\dfrac{z-y}{x}\right)^2$

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

Resolución:

→ En la condición, efectuando se tendrá:

$$\frac{(x-z)(x+y)}{(z-y)(x+y)}+\frac{z^2}{(x+y)(z-y)}=1$$

$$\frac{x^2+xy-xz-yz+z^2}{(z-y)(x+y)}=1$$

$$x^2+xy-xz-yz+z^2=xz+yz-xy-y^2$$

→ Transponiendo todo al primer miembro:

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz}_{\textit{Trinomio al cuadrado}}=0$$

$$(x+y-z)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \text{“ } x+y-z=0 \text{ ”}$$

→ En la expresión pedida “M”

$$M=\left(\frac{z-x}{y}\right)^2+\left(\frac{x+y}{z}\right)^2+\left(\frac{z-y}{x}\right)^2$$

→ Se tendrá:

$$M=\left(\frac{y}{y}\right)^2+\left(\frac{z}{z}\right)^2+\left(\frac{x}{x}\right)^2=1^2+1^2+1^2$$

$M=\boxed{3}$ **Rpta.**