EJERCICIOS RESUELTOS DE POLINOMIOS ESPECIALES

1. Calcular "ab" en el siguiente polinomio homogéneo.

$$P(x;y;z)=x^{(a+b)^{a-b}}+2y^{(a-b)^{a+b}}+5z^{(a+b)^{2b}}$$

a) 1 b) 2 c) 6
d) 4 e) 3

Resolución:

→ Por ser polinomio homogéneo tendremos:

$$\underbrace{(a+b)^{a-b}}_{\text{"I"}}=\underbrace{(a-b)^{a+b}}_{\text{"II"}}=\underbrace{(a+b)^{2b}}_{\text{"III"}}$$

→ Resolviendo "I" y "III"

$$(a+b)^{a-b}=(a+b)^{2b}$$

$$\boxed{a=3b}\quad\cdots(*)$$

→ Resolviendo "II" y "III"

$$(2b)^{4b}=(4b)^{2b}$$

$$4b^2=4b$$

$$\boxed{b=1}$$

→ Luego reemplazando en "*"

$$a=3 \quad\Rightarrow\quad ab=\boxed{3}$$ **Rpta.**

2. Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio homogéneo:

$$P(x;y)=mnx^{4n}\cdot y^{3n+2}+2nx^{2m}\cdot y^{5n+4}-mx^{3m}\cdot y^{5n+1}$$

a) 9 b) 12 c) 15
d) 17 e) 21

Resolución:

→ Por ser Polinomio Homogéneo:

$$\underbrace{7n+2}_{\text{I}}=\underbrace{2m+5n+4}_{\text{II}}=\underbrace{3m+5n+1}_{\text{III}}$$

→ Resolviendo "II" y "III"

$$2m+5n+4=3m+5n+1\;\Rightarrow\;\boxed{m=3}$$

→ Resolviendo "I" y "II"

$$7n+2=2(3)+5n+4$$

$$\square\;\boxed{n=4}$$

$$\therefore\;\sum\text{Coef.}=mn+2n-m=\boxed{17}$$ **Rpta.**

3. Calcular "abcd" si:

$$P(x)=2x^{d+c}-3x^{a+b}+x^{a+c}-4x^{b-1}$$

es completo y ordenado en forma descendente:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

Resolución:

→ Por ser completo y ordenado:

- $b-1=0 \quad\Rightarrow\quad b=1$
- $a+c=1 \quad\Rightarrow\quad c=0$
- $a+b=2 \quad\Rightarrow\quad a=1$
- $d+c=3 \quad\Rightarrow\quad d=3$

$\therefore\;abcd=\boxed{0}$ **Rpta.**

4. De la identidad:

$$a(x+1)^2+b(x-1)^2\equiv 9x^2+10x+c$$

Halle "abc"

a) 120 b) 126 c) 132
d) 122 e) 128

Resolución:

→ Expresemos el primer miembro en función del segundo miembro

$$a(x^2+2x+1)+b(x^2-2x+1)\equiv 9x^2+10x+c$$

$$ax^2+2ax+a+bx^2-2bx+b\equiv 9x^2+10x+c$$

→ Agrupando convenientemente:

$$(a+b)x^2+(2a-2b)x+(a+b)\equiv 9x^2+10x+c$$

→ Resolviendo por comparación:

$$\underline{(a+b)}x^2+\underline{(2a-2b)}x+\underline{(a+b)}\equiv 9x^2+10x+c$$

- $a+b=9 \qquad a+b=9 \qquad \cdots(\text{I})$
- $2a-2b=10 \qquad a-b=5 \qquad \cdots(\text{II})$
- $a+b=c \qquad \boxed{9=c}$

→ De "I" y "II"

$$\boxed{a=7}\;\text{y}\;\boxed{b=2}$$

$$\therefore\;abc=\boxed{126}$$ **Rpta.**

5. Si el polinomio $P(x,z)$ es completo, homogéneo y ordenado en forma decreciente respecto a "x" y en forma creciente con respecto a "z", calcular "a + b"

$$P(x;z)=x^{a+1}\cdot z^{b+2}+x^{a}\cdot z^{b+3}+5x^{a-1}\cdot z^{b+4}-7x^{b+2}\cdot z^{a+1}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 0

Resolución:

→ Por decreciente con respecto a "x".

$$b+2=0 \qquad b=-2$$
$$a-1=1 \qquad a=2$$
$$\therefore \; a+b=\boxed{0} \;\textbf{Rpta.}$$

6. En el polinomio de variable "x"

$$P(x)=x\left(ax^2+bx+c\right)-2x\left(bx^2+cx+d\right)+2d-1$$

es idénticamente nulo, halle: $M=\sqrt[acd]{abcd}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

Resolución:

→ Transformando y ordenando "P (x)".

$$\underline{ax^3}+\underline{bx^2}+cx-\underline{2bx^3}-2cx^2-2dx+2d-1$$
$$(a-2b)x^3+(b-2c)x^2+(c-2d)x+(2d-1)$$

→ Por ser polinomio idénticamente nulo

$$\underbrace{(a-2b)}_{0}x^3+\underbrace{(b-2c)}_{0}x^2+\underbrace{(c-2d)}_{0}x+\underbrace{(2d-1)}_{0}$$

- $a-2b=0 \quad \cdots(\text{I})$
- $b-2c=0 \quad \cdots(\text{II})$
- $c-2d=0 \quad \cdots(\text{III})$
- $2d-1=0 \quad \cdots(\text{IV})$

→ De: "I", "II", "III", "IV" resolviendo obtenemos:

$$\boxed{a=4}\;,\quad \boxed{b=2}\;,\quad \boxed{c=1}\;,\quad \boxed{d=\frac{1}{2}}$$

Se pide: $M=\sqrt[acd]{abcd}=\sqrt{4}$

$$M=\boxed{2}\;\textbf{Rpta.}$$

7. Sean: $P(x)\equiv Q(x)$, hallar "$m+n+p$"

$$P(x)=\left(m^m-27\right)x^4-32x+(p-5)$$

$Q(x)=4nx$ con:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 5

Resolución:

→ Por la condición: $P(x)\equiv Q(x)$

$$\left(m^m-27\right)x^4-32x+(p-5)\equiv 4nx$$

→ Ahora para relacionar será necesario completar el segundo miembro y de esta manera aplicar polinomios idénticos:

$$\left(m^m-27\right)x^4-32x+(p-5)\equiv 0x^4+4nx+0$$

→ Ahora por polinomios idénticos:

$$\underbrace{\left(m^m-27\right)}x^4\underbrace{-32}x+\underbrace{(p-5)}\equiv 0x^4+\underline{4n}x+0$$

- $m^m-27=0 \quad \rightarrow m^m=3^3 \quad \Rightarrow \quad m=3$
- $4n=-32 \quad \Rightarrow \quad n=-8$
- $p-5=0 \quad \Rightarrow \quad p=5$

Se pide: $m+n+p=\boxed{0}$ **Rpta.**

8. Sabiendo que:

$$P(x)=\left(a^2+b^2-ab\right)x^5+\left(b^2+c^2-bc\right)x^3+\left(c^2+a^2-ac\right)$$

es un polinomio idénticamente nulo "P.I.N."

Calcular: $M=\dfrac{(a+b)^2}{ab}+\dfrac{(b+c)^2}{bc}+\dfrac{(c+a)^2}{ca}$

a) 3 b) 6 c) 9
d) 15 e) 18

Resolución:

→ Por ser (P.I.N.)

- $a^2+b^2-ab=0 \rightarrow \; a^2+b^2=ab \quad (\text{I})$
- $b^2+c^2-bc=0 \rightarrow \; b^2+c^2=bc \quad (\text{II})$
- $c^2+a^2-ac=0 \rightarrow \; c^2+a^2=ac \quad (\text{III})$

→ Con estas condiciones veamos "M"

$$M=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}+\frac{b^2+2bc+c^2}{bc}+\frac{c^2+2ca+a^2}{ca}$$

De (I) (II) y (III)

$$M=\frac{\overbrace{a^2+b^2}^{ab}+2ab}{ab}+\frac{\overbrace{b^2+c^2}^{bc}+2bc}{bc}+\frac{\overbrace{c^2+a^2}^{ca}+2ca}{ca}$$

$$M=\frac{3ab}{ab}+\frac{3bc}{bc}+\frac{3ca}{ca}$$

→ Simplificando:

$$M=\boxed{9}\;\textbf{Rpta.}$$

9. En el polinomio:

$$P(x+1)=(3x+2)^{2n}\cdot(5x+7)^{2}\cdot(4x+7)$$

se observa que:

$$3\sum\text{Coef.}=686\cdot\text{T.I.}$$

Halle el valor de "n":

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2

d) $\frac{2}{3}$ e) 3

Resolución:

$\rightarrow$ Recordemos que:

$$\sum\text{Coef.}=P(1)$$
$$\text{T.I.}=P(0)$$

$\rightarrow$ Entonces veamos que para hallar "$\sum\text{Coef.}$", deberemos reemplazar "$x=0$" en P., y obtendremos:

$$P(0+1)=(3(0)+2)^{2n}\cdot(5(0)+7)^{2}\cdot(4(0)+7)$$
$$P(1)=2^{2n}\cdot 7^{2}\cdot 7$$
$$P(1)=2^{2n}\cdot 343\Rightarrow\boxed{\sum\text{Coef.}=2^{2n}\cdot 343}$$

$\rightarrow$ Para hallar el término independiente debemos reemplazar "$x=-1$" en el polinomio y obtendremos:

$$P((-1)+1)=(3(-1)+2)^{2n}\cdot(5(-1)+7)^{2}\cdot(4(-1)+7)$$
$$P(0)=(-1)^{2n}\cdot(2)^{2}\cdot 3$$
$$P(0)=12=\text{T.I.}$$

$\rightarrow$ Por la condición $3\sum\text{Coef.}=686\cdot\text{T.I.}$, tendremos:

$$3\cdot 2^{2n}\cdot 343=686\cdot 12$$
$$2^{2n}=8$$
$$2^{2n}=2^{3}$$

$\rightarrow$ Por ecuaciones exponenciales:

$$2n=3$$
$$n=\boxed{\frac{3}{2}}$$ **Rpta.**

10. Un polinomio mónico "$P(x)$" de tercer grado, adopta el mismo valor numérico para: $x=\{-1;-2;-3\}$

Si la suma de coeficientes de "$P(x)$" es 105.

Hallar "T.I." del polinomio.

a) 81 b) 87 c) 85

d) 97 e) 91

Resolución:

$\rightarrow$ Veamos por dato:

$$P(-1)=P(-2)=P(-3)=m$$

$\rightarrow$ También:

$$P(1)=105$$

$\rightarrow$ El polinomio adoptará la siguiente forma:

$$P(x)=(x+1)(x+2)(x+3)+m$$

$\rightarrow$ Ahora podemos calcular "$P(1)$"

$$P(1)=(1+1)(1+2)(1+3)+m=105$$
$$m=81$$

$\rightarrow$ Reemplazando en "$P(x)$"

$$P(x)=\underbrace{(x+1)(x+2)(x+3)}_{\text{Por Productos Notables:}}+m$$

Recuerda!

$$\boxed{(x+a)(x+b)(x+c)=x^{3}+(a+b+c)x^{2}+(ab+ac+bc)x+abc}$$

$$P(x)=x^{3}+6x^{2}+11x+6+81$$
$$P(x)=x^{3}+6x^{2}+11x+87$$
$$\text{T.I.}=\boxed{87}$$ **Rpta.**

11. Si se cumple:

$$7x^{d-1}+dx^{b+c}+bx^{a}-1\equiv ax^{4}+(2a+1)x^{a-1}+5x^{a}+c$$

El valor de: $k=(b-d)^{(b+c)^{(b-a)^{c}}}$

a) 1 b) 2 c) 3

d) 4 e) 5

Resolución:

$\rightarrow$ De la identidad se deduce:

$$c=-1 \quad y \quad b=5$$

$\rightarrow$ Luego se tendrá entonces:

$$7x^{d-1}+dx^{4}+5x^{a}-1\equiv ax^{4}+(2a+1)x^{a-1}+5x^{a}-1$$

$\rightarrow$ De aquí también se deduce que los coeficientes de x^{4} también serán iguales, "$a=d$"

$\rightarrow$ Reemplazando nuevamente:

$$7x^{a-1}+dx^{4}+5x^{a}-1\equiv ax^{4}+(2a+1)x^{a-1}+5x^{a}-1$$

$\rightarrow$ De donde la única posibilidad que queda es que los coeficientes de x^{a-1} sean iguales:

$$7=2a+1 \quad\Rightarrow\quad a=3$$

$\rightarrow$ Se pide:

$$k=(5-3)^{(5-1)^{(5-3)^{-1}}}=2^{4^{2^{-1}}}=2^{4^{\frac{1}{2}}}=2^{2}$$
$$k=\boxed{4}$$ **Rpta.**