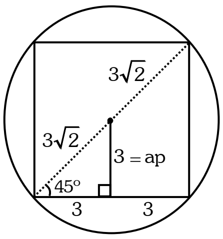
EJERCICIOS RESUELTOS DE POLIGONOS REGULARES

01. Calcular el lado y la apotema de un cuadrado, si el radio de la circunferencia circunscrita mide $3\sqrt{2}$.

a) 3 y $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ b) 4 y $2\sqrt{2}$ c) 9 y $3\sqrt{2}$
d) 6 y 3   e) 8 y 4

Resolución



$L_4 = ?$, donde: $L_4 = R\sqrt{2}$

$a_4 = ?$, donde: $a_4 = \frac{R}{2}\sqrt{2}$

Reemplazando el circunradio $R = 3\sqrt{2}$

$L_4 = 3\sqrt{2}\sqrt{2}$ $a_4 = \frac{3\cancel{\sqrt{2}}\,\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}$

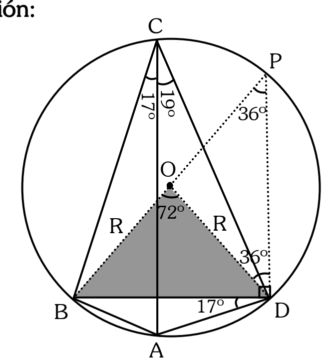
$L_4 = 6$ $a_4 = 3$

$\boxed{6 \text{ y } 3}$ **Rpta.**

02. En un cuadrilátero inscriptible ABCD, los ángulos BDA y ACD miden 17° y 19° respectivamente. Si la longitud de la diagonal $\overline{BD}$ es $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Hallar la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al cuadrilatero.

a) $\sqrt{3}+1$ b) $\sqrt{2}+1$ c) $\sqrt{5}+1$
d) $\sqrt{2}-1$ e) $\sqrt{5}-1$

Resolución:



Por dato: $BD = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ .... (I)

En la figura, $BD = l_5$

Entonces: $BD = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ... (II)

De (I) y (II):

$\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$

De donde: $R = \boxed{\sqrt{5}+1}$ **Rpta.**

03. Determinar el apotema de un dodecágono regular si su circunradio mide $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

a) 1.5   b) 2   c) 2.5
d) 1   e) 0.5

Solución

Conocemos que:

$a_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = ?$; $R = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Reemplazando:

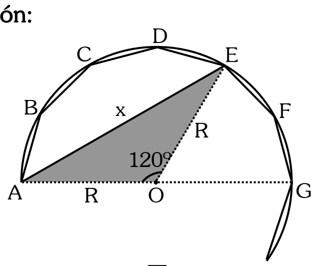
$a_{12} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$a_{12} = \boxed{1}$ **Rpta.**

04. La longitud del lado de un dodecágono regular ABCDEF...... es $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$. Hallar: AE.

a) 2 b) 3 c) 5
d) 7 e) 8

Resolución:



En el Δ AOE: $x = R\sqrt{3}$

Pero por dato: $l_{12} = \sqrt{6-3\sqrt{3}}$

Además: $l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$R\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

De donde: $R = \sqrt{3}$

Reemplazando: $x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

$x = \boxed{3}$ **Rpta.**

05. Hallar el lado de un pentágono regular si su circunradio mide $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

a) $4\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$
d) $3\sqrt{5}$ e) $8\sqrt{5}$

Resolución

$L_5 = ?$

$R = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$

$L_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$L_5 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$

$L_5 = \boxed{2\sqrt{5}}$ **Rpta.**

06. Si un cuadrado y un hexágono regular se inscriben en una circunferencia, la razón de sus apotemas es:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e) 1

Resolución

$\frac{a_4}{a_6} = ?$

$\frac{a_4}{a_6} = \frac{\frac{\cancel{R}}{\cancel{2}}\sqrt{2}}{\frac{\cancel{R}}{\cancel{2}}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} =$

$\frac{a_4}{a_6} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$ **Rpta.**

07. Calcular el perímetro de un cuadrado inscrito en la misma circunferencia que un octógono regular cuya apotema mide $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

a) 4 b) 16 c) $4\sqrt{2}$
d) $16\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{2}$

Resolución

Perim $_4 = ?$

$a_8 = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\frac{R}{2}\sqrt{\cancel{2+\sqrt{2}}} = 2\sqrt{\cancel{2+\sqrt{2}}}$

$R = 4$

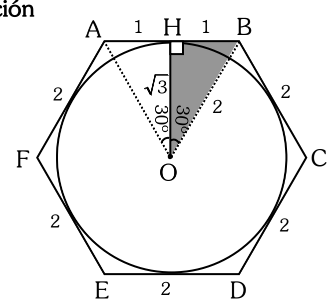
$P_4 = 4L_4 = 4\left(R\sqrt{2}\right) = 4\left(4\sqrt{2}\right)$

$P_4 = \boxed{16\sqrt{2}}$ **Rpta.**

08. Cuál es el perímetro de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia cuyo radio mide $\sqrt{3}$m .

a) $9\sqrt{3}$ b) 6 c) 3
d) 12 e) $9\sqrt{3}$

Resolución

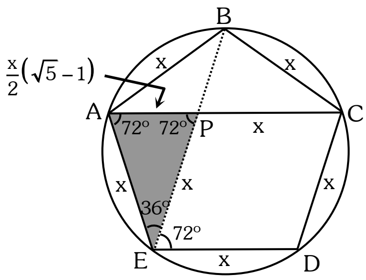


* Se observa que el radio viene a ser la apotema del hexágono circunscrito a la circunferencia
* En el triángulo notable sombreado
  $OH = \sqrt{3} \Rightarrow OB = 2$
* El Δ ABO es equilátero
  $OB = OA = AB = 2$
* Piden el perímetro:
  $\text{Peri} = 2(6) = \boxed{12}$ **Rpta.**

09. La diagonal de un pentágono regular mide $\left(\sqrt{5}+1\right)$ m . Hallar su perímetro.

a) 12 m b) 11 m c) 10 m
d) 15 m e) 18 m

Resolución



Por dato: $AC = \sqrt{5}+1$
En la figura el cuadrilátero EPCD es un rombo:
$EP = PC = CD = ED = x$
En el Δ EAP isósceles; como $m\measuredangle AEP = 36^\circ$
Entonces se tiene que:

$$AP = l_{10} = \frac{x}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

Luego: $AC = \sqrt{5}+1 = \frac{x}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)+x$

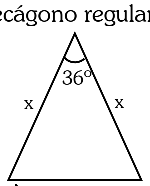
De donde: $x = 2$
En consecuencia el perímetro del pentágono regular es:

$2p = 5x = \boxed{10\text{ m}}$ **Rpta.**

10. El ángulo formado por los lados iguales de un triángulo isósceles es de 36°, si el lado desigual mide 10 m, determinar uno de los lados iguales ($\sqrt{5} = 2,23$).

a) 15 b) FD c) 8,96
d) 16,26 e) 18,44

Resolución
Se observa que el triángulo isósceles es el triángulo elemental del decágono regular.



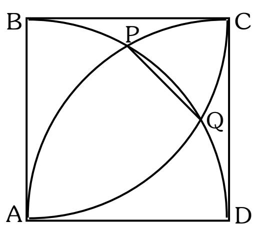
$$L_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \quad ; \quad ^{10}\sqrt{5} = 2.23$$

$$10 = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

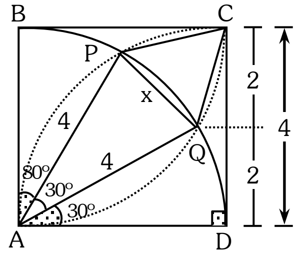
$R = x = \boxed{16.26}$ **Rpta.**

11. Hallar $\overline{PQ}$, si el lado del cuadrado ABCD es 4, siendo A, B y D centro de los cuadrantes.

a) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$
b) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$
c) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
d) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
e) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$



Resolución

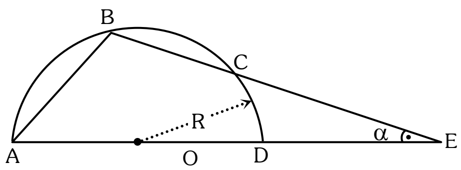


* El triángulo isósceles PAQ es el triángulo elemental de un dodecágono.
* Luego "x" es una de los lados del dodecágono regular:

$x = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad ; \quad R = 4$

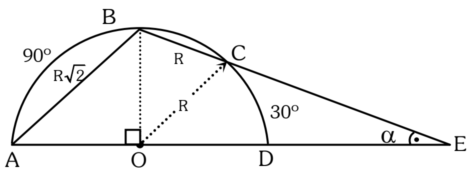
$x = \boxed{4\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ **Rpta.**

12. La figura muestra a una semicircunferencia de diámetro AD y radio "R". Si $AB = R\sqrt{2}$, $BC = R$, hallar α.



a) 15° b) 30° c) 37°
d) 45° e) 18°

Resolución



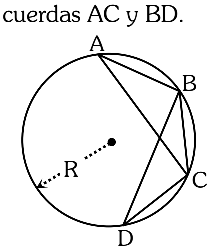
Las cuerdas AB y BC son uno de los lados de un cuadrado y de un hexágono inscritos en dicha circunferencia, por ende determinan arcos de 90° y 60° , de donde:

$AB = 90^\circ$, $BC = 60^\circ$ y $CD = 60^\circ$
En el gráfico se observa que "α" es un ángulo exterior

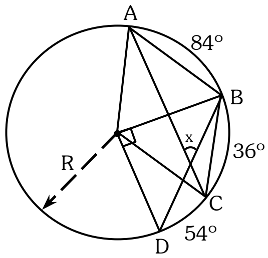
$$\alpha = \frac{90^\circ - 30^\circ}{2} = \boxed{30^\circ}$$ **Rpta.**

13. En la figura: $AC = R\sqrt{3}$; $BD = R\sqrt{2}$; $BC = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$. Hallar la medida del menor ángulo formado por las cuerdas AC y BD.

a) 69°
b) 71°
c) 83°
d) 87°
e) 76°



Resolución



$\overline{AC} = R\sqrt{3} \ \rightarrow \ AC = 120°$

$\overline{BD} = R\sqrt{2} \ \rightarrow \ BD = 90°$

$\overline{BC} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \ \rightarrow \ BC = 36°$

"x" es un ángulo interior:

$$x = \frac{AB + DC}{2} = \frac{84° + 54°}{2}$$

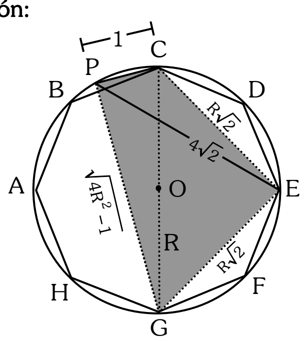
$x = \boxed{69°}$ **Rpta.**

14. Dado un octógono regular ABCDEFGH inscrito en una circunferencia, sobre el arco BC se considera un punto cualquiera "P". Si: $PC = 1\ m$ y $PE = 4\sqrt{2}\ m$. Hallar la longitud del radio de la circunferencia.

a) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ b) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ c) $\frac{3}{7}\sqrt{5}$

d) $\frac{7}{3}\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{5}\sqrt{7}$

Resolución:



En la figura: $CE = EG = l_4 = R\sqrt{2}$

En el triángulo rectángulo GPC, por el teorema de Pitágoras:

$4R^2 = 1 + PG^2$; $PG = \sqrt{4R^2 - 1}$

Por el teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero PCEG, se tiene que:

$2R \cdot 4\sqrt{2} = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{4R^2 - 1} + 1 \cdot R\sqrt{2}$

$8 = \sqrt{4R^2 - 1} + 1 \ \rightarrow \ 49 = 4R^2 - 1$

$4R^2 = 50 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{25}{2}}$

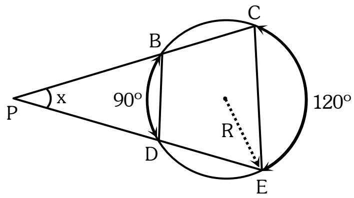
$R = \boxed{\frac{5}{2}\sqrt{2}}$ **Rpta.**

15. Desde un punto P exterior a una circunferencia, se trazan dos secantes PBC y PDE. Cuánto mide el ángulo P si las cuerdas BD y CE miden $R\sqrt{2}$ y $R\sqrt{3}$ respectivamente. (El radio de la circunferencia es R).

a) 45° b) 30° c) 18°

d) 15° e) 12°

Resolución:



$\overline{CE} = R\sqrt{3} \ \rightarrow \ CE = 120°$

$\overline{BD} = R\sqrt{2} \ \rightarrow \ BD = 90°$

Por ángulo exterior, se tiene que:

$x = \frac{120° - 90}{2} = \frac{30°}{2} = \boxed{15°}$ **Rpta.**

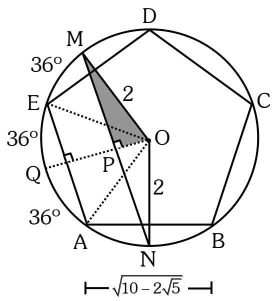
16. Se tiene un pentágono regular ABCDE inscrito en una circunferencia. Si $AB = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de los arcos AB y DE.

a) $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

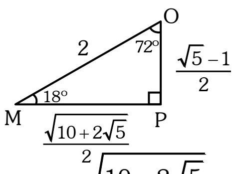
c) $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{3+2\sqrt{5}}$

e) $2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

Resolución



En el triángulo sombreado:



Como: $MP = PN = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

Luego: $MN = MP + PN$

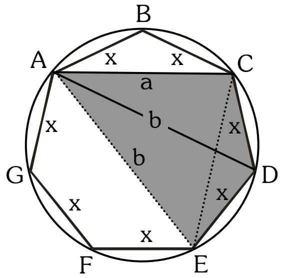
$= \boxed{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ **Rpta.**

17. En un heptágono regular ABCDEFG. Si:

$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{9}$. Hallar su perímetro

a) 24 b) 63 c) 56
d) 72 e) 48

Resolución:



Dato: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{9}$ .... (I)

En la figura:

AC = CE = a ; AD = AE = b

Por el teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero ACDE:

ab = ax + bx

$\frac{1}{x}=\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab} \rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ..... (II)

De (I) y (II) se tiene que:

$\frac{1}{x}=\frac{1}{9} \rightarrow x=9$

Luego su perímetro será:

2p = 7x

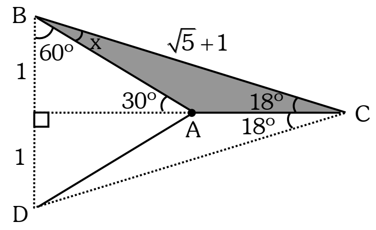
2p = $\boxed{63}$ **Rpta.**

18. En un triángulo ABC, obtuso en A, se sabe que $m(\measuredangle C)=18°$, AB = 2m. y $BC=\left(\sqrt{5}+1\right)$cm.

¿Cuál es la medida del ángulo B?

a) 24° b) 12° c) 36°
d) 15° e) 18°

Resolución



Formado el triángulo isósceles BDC y comprobando de que sea el triángulo elemental de un decágono regular.

$L_{10}=\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

$L_{10}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}=2$

Por ángulo exterior en el triángulo sombreado

x + 18° = 30°

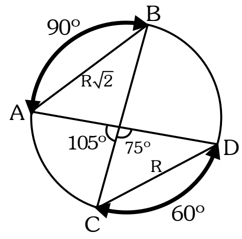
x = $\boxed{12°}$ **Rpta.**

19. En una circunferencia se tienen las cuerdas $AB=R\sqrt{2}$ y $CD=R$; donde R es el radio de la circunferencia. Hallar el mayor ángulo determinado por las cuerdas BC y AD si las cuerdas AB y CD no se cortan.

a) 105° b) 100° c) 120°
d) 115° e) 130°

Resolución:

AB y CD son los lados de un cuadrado y de un hexágono regular, entonces:



AB = 90°

CD = 60°

Por ángulo interior

$C\hat{E}D=\frac{60°+90°}{2}$

$C\hat{E}D=75°$

Mayor ángulo:

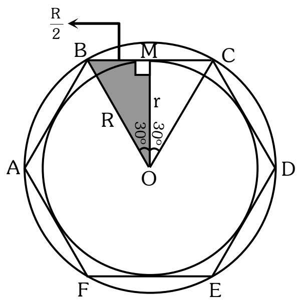
180° − 75° = $\boxed{105°}$ **Rpta.**

20. En qué relación se encuentran los radios de la circunferencia circunscrita e inscrita a un mismo exágono regular.

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

Resolución:

En el triángulo rectángulo notable BMO



Si: OB = R ⇒ $OM=r=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

$\frac{R}{r}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (Racionalizando)

$\frac{R}{r}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ **Rpta.**