EJERCICIOS RESUELTOS DE POLIGONOS

1.- Calcular el número de diagonales de un polígono en el cual la sustracción entre la suma de las medidas de los ángulos internos y la suma de las medidas de los ángulos externos es 360°.

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 5

Solución:

- Dato: $S_{m\sphericalangle i} - S_{m\sphericalangle e} = 360°$

$$180°(n-2) - 360° = 360°$$

$$n = 6$$

- Nos piden: $D = \dfrac{n(n-3)}{2} \rightarrow D = \dfrac{6(6-3)}{2}$

$\boxed{D = 9}$ Rpta.

2.- Hallar el número de diagonales medias de un polígono en el cual el número total de diagonales es el triple del número de lados.

a) 36 b) 72 c) 48
d) 18 e) 15

Solución:

- Dato: $D = 3n$

$$\frac{n(n-3)}{2} = 3n \qquad \boxed{n = 9}$$

- Nos piden: $DM = \dfrac{n(n-1)}{2} \rightarrow DM = \dfrac{9(9-1)}{2}$

$\boxed{DM = 36}$ Rpta.

3.- Hallar la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono en el cual la suma entre el número total de diagonales y su número de lados es 21.

a) 540° b) 720° c) 1020°
d) 900° e) 1200°

Solución:

- Dato: $D + n = 21$

$$\frac{n(n-3)}{2} + n = 21 \rightarrow n^2 - n - 42 = 0$$

$$(n-7)(n+6) = 0$$

$$n = 7 \quad \vee \quad \cancel{n = -6}$$

$$\boxed{n = 7}$$

- Nos piden: $S_{m\sphericalangle i} = 180°(n-2)$

$$S_{m\sphericalangle i} = 180°(7-2)$$

$\boxed{S_{m\sphericalangle i} = 900°}$ Rpta.

4.- Hallar el número de diagonales medias que se trazan desde un lado de un polígono regular, en el cual se cumple que 30 veces la medida de un ángulo interior es igual al cuadrado de la medida de su ángulo central.

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 5

Solución:

- Por dato: $30 \cdot (m\sphericalangle i) = (m\sphericalangle e)^2$

$$30\left[\frac{180°(n-2)}{n}\right] = \left[\frac{360°}{n}\right]^2$$

$$n^2 - 2n - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad (n-6)(n+4) = 0$$

$$\boxed{n = 6}$$

- Nos piden:

$$DM_{1\,lado} = n - 1 \qquad DM_{1\,lado} = 6 - 1$$

$\boxed{DM_{1\,lado} = 5}$ Rpta.

5.- Calcular la medida de un ángulo interior de un polígono equiángulo cuyo número de diagonales excede en 8 al número de diagonales de otro polígono que tiene un lado menos.

a) 150° b) 120° c) 144°
d) 108° e) 135°

Solución:

- Para polígono de "n" lados, su número de diagonales será: $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$

- Para un polígono de "(n – 1)" lados, su número de diagonales sera: $D = \dfrac{(n-1)[(n-1)-3]}{2}$

- Por dato del problema:

$$\frac{n(n-3)}{2} - 8 = \frac{(n-1)[(n-1)-3]}{2}$$

$$n^2 - 3n - 16 = n^2 - 5n + 4$$

$$\boxed{n = 10}$$

- Nos piden: $m\sphericalangle i = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

$$m\sphericalangle i = \frac{180°(10-2)}{10}$$

$\boxed{m\sphericalangle i = 144°}$ Rpta.

6.- La diferencia de las medidas de los ángulos interiores de dos polígonos equiángulos es 10°. Si uno de ellos tiene 6 lados menos que el otro, se pide hallar el número de diagonales trazadas desde un vértice en el polígono de menos número de lados.

a) 16 b) 27 c) 18
d) 9 e) 25

Solución:

- Para un polígono de "n" lados, la medida de su ángulo interior será: $m\sphericalangle i = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$

- Para un polígono de "(n − 6)" lados, la medida de su ángulo interior será: $m\sphericalangle i = \dfrac{180^\circ\left[(n-6)-2\right]}{(n-6)}$

- Por dato del problema:

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n} - \frac{180^\circ\left[(n-6)-2\right]}{(n-6)} = 10^\circ$$

$$18\left[(n-2)(n-6) - n(n-8)\right] = n(n-6)$$

$$18 \cdot 12 = n(n-6)$$

$$18(18-6) = n(n-6) \qquad \boxed{n=18}$$

- El número de lados del polígono menor será $(n-6) = 18-6 = 12$

- Nos piden: $D_{1V} = (n-6) - 3$

$$D_{1v} = 12 - 3$$

$\boxed{D_{1v} = 9}$ Rpta.

7.- ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuya medida de un ángulo interno es $(x+11)$ veces la medida de un ángulo externo y además se sabe que el número de diagonales es $110x$?

a) 85 b) 76 c) 75
d) 65 e) 80

Solución:

- Por dato:

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n} = (x+11)\cdot\frac{360^\circ}{n}$$

$$x = \frac{n-24}{2} \ \ldots \ (I)$$

- También por dato:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 110x \qquad \rightarrow \qquad \frac{n(n-3)}{220} = x \ \ldots (II)$$

- De (I) y (II):

$$n^2 - 113n + 2640 = 0$$

$$(n-80)(n-33) = 0$$

$$\boxed{n=80} \quad \vee \quad \boxed{n=33}$$

- Nos fijamos en las alternativas, y observamos que la respuesta es

$\boxed{n=80}$ Rpta.

8.- En un polígono, se sabe que el número de diagonales trazadas desde 5 vértices consecutivos es 69. Se pide hallar la relación entre el máximo número de ángulos internos agudos y el mínimo número de ángulos internos obtusos.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) 1

Solución:

- Sabemos:

$$D_v = n\cdot v - \frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

$$69 = n\cdot 5 - \frac{(5+1)(5+2)}{2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{n=18}$$

- Nos piden: $x = \dfrac{3}{n-3} \qquad x = \dfrac{3}{18-3}$

$\boxed{x = \frac{1}{5}}$ Rpta.

9.- Si el número de lados de un polígono equiángulo aumenta en 8, su número de diagonales aumenta en 68. ¿Cuánto es la suma de las medidas de los ángulos internos de dicho polígono?

a) 540° b) 1080° c) 820°
c) 720° e) 1260°

Solución:

	Políg. 1	Políg. 2
Nro. de Lados	n	$(n+8)$
Diag.	$\dfrac{n(n-3)}{2}$	$\dfrac{(n+8)\left[(n+8)-3\right]}{2}$

- Por dato:

$$\frac{n(n-3)}{2} + 68 = \frac{(n+8)\left[(n+8)-3\right]}{2}$$

$$\cancel{n^2} - 3n + 136 = \cancel{n^2} + 13n + 40$$

$$96 = 16n \ \rightarrow \boxed{n=6}$$

- Nos piden:

$$S_{m\sphericalangle i} = 180^\circ(n-2) \quad S_{m\sphericalangle i} = 180^\circ(6-2)$$

$\boxed{S_{m\sphericalangle i} = 720^\circ}$ Rpta.

10.- Si a un polígono regular se le aumenta un lado, la medida de su ángulo interior aumente en 12°. ¿Cuál es el polígono?

a) Hexágono b) Pentágono
c) Octágono d) Heptágono
e) Nonágono

Solución:

	Políg. 1	Políg. 2
Nro. de Lados	n	$(n+1)$
Áng. Int.	$\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$	$\dfrac{180^\circ\left[(n+1)-2\right]}{(n+1)}$

- Por dato:

$$\frac{\cancel{180^\circ}(n-2)}{n} + \cancel{12^\circ} = \frac{\cancel{180^\circ}\left[(n+1)-2\right]}{(n+1)}$$

$$\frac{15(n-2)}{n} + 1 = \frac{15(n-1)}{(n+1)}$$

$$15n^2 - 15n - 30 + n(n+1) = 15n^2 - 15n$$

$$n(n+1) = 30 \qquad n(n+1) = 5(5+1)$$

$$\boxed{n=5}$$

- El polígono es un:

$\boxed{\text{Pentágono}}$ Rpta.

11.- Si un polígono de “n” lados tuviera "$(n-11)$" lados menos, tendría $(n+8)$ diagonales menos. Hallar “n”.

a) 11 b) 13 c) 17
d) 19 e) 21

Solución:

	Políg. 1	Políg. 2
Nro. de Lados	n	$n-(n-11)=11$
Diag.	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{11[11-3]}{2}$

- Por dato:

$$\frac{n(n-3)}{2}-(n+8)=\frac{11(11-3)}{2}$$

$$n^2-3n-2n-16=88$$

$$n^2-5n=104$$

$$n(n-5)=13(13-5)$$

$\boxed{n=13}$ Rpta.

12.- En cierto polígono regular sucede que al quintuplicar el número de lados, la suma de las medidas de los ángulos se sextuplica. Un ángulo central de dicho polígono mide:

a) 45° b) 20° c) 24°
d) 30° e) 36°

Solución:

	Políg. 1	Políg. 2
Nro. de Lados	n	$5n$
Suma de Áng. Int.	$180°(n-2)$	$180°(5n-2)$

- Por dato:

$$6\cdot\left[\cancel{180°}(n-2)\right]=\cancel{180°}(5n-2)$$

$$6n-12=5n-2 \quad\rightarrow\quad \boxed{n=10}$$

- Nos piden:

$$m\measuredangle c=\frac{360°}{n} \quad\rightarrow\quad m\measuredangle c=\frac{360}{10}$$

$\boxed{m\measuredangle c=36°}$ Rpta.

13.- Si la medida de cada ángulo exterior de un polígono regular aumenta en 15°, resulta otro polígono regular cuyo número de diagonales es 11 menos que el número de diagonales del polígono original. Hallar la medida del ángulo exterior del polígono original.

a) 120° b) 90° c) 72°
d) 60° e) 45°

Solución:

	Políg. 1	Políg. 2
Nro. de Lados	n	m
Áng. Ext.	$\frac{360°}{n}$	$\frac{360°}{m}$
Diag.	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{m(m-3)}{2}$

- Por el primer dato:

$$\frac{\cancel{360°}}{n}+\cancel{15°}=\frac{\cancel{360°}}{m}$$

$$24m+mn=24n$$

$$n=\frac{24m}{24-m}\ \ldots\ (I)$$

- Por el segundo dato:

$$\frac{n(n-3)}{2}-\frac{m(m-3)}{2}=11$$

$$n^2-3n-m^2+3m=22$$

$$(n-m)(n+m-3)=22\ \ldots\ (II)$$

- Resolver este sistema de ecuaciones será muy complicado, pues resultaría muy operativo. Mejor optaremos por dar valores a “m” con la condición que $m\geq 3$ y $m\in\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lcl}
\text{Si } m=3 & \rightarrow & n\neq\mathbb{Z}\\
\text{Si } m=4 & \rightarrow & n\neq\mathbb{Z}\\
\text{Si } m=5 & \rightarrow & n\neq\mathbb{Z}\\
\text{Si } \boxed{m=6} & \rightarrow & \boxed{n=8}\\
\text{Si } m=7 & \rightarrow & n\neq\mathbb{Z}\\
\text{Si } \boxed{m=8} & \rightarrow & \boxed{n=12}\\
\text{Si } m=9 & \rightarrow & n\neq\mathbb{Z}\\
\text{Si } m=10 & \rightarrow & n\neq\mathbb{Z}\\
\text{Si } m=11 & \rightarrow & n\neq\mathbb{Z}\\
\text{Si } \boxed{m=12} & \rightarrow & \boxed{n=24}
\end{array}$$

- Con los valores enteros de “n”, reemplazaremos en la ecuación (II)

Si $n=8$ y $m=6$:

$$(8-6)(8+6-3)=22 \quad\rightarrow\quad \boxed{22\equiv 22}\ \text{¡Si!}$$

Si $n=12$ y $m=8$:

$$(12-8)(12+8-3)=22 \quad\rightarrow\quad \boxed{68\neq 22}\ \text{¡No!}$$

Si $n=24$ y $n=12$:

$$(24-12)(24+12-3)=22 \quad\rightarrow\quad \boxed{396\neq 22}\ \text{¡No!}$$

- Luego: $\boxed{n=8}$
- Nos piden:

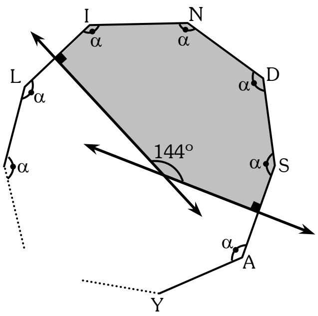
$$m\measuredangle e=\frac{360°}{n} \rightarrow m\measuredangle e=\frac{360°}{8}$$

$\boxed{m\measuredangle e=45°}$ Rpta.

14.- En un polígono regular L, I, N, D, S, A, Y,… las mediatrices de los lados LI y SA forman un ángulo cuya medida es 120°. Hallar el número de diagonales que se pueden trazar desde 5 vértices consecutivos.

a) 30 b) 25 c) 15
d) 18 e) 29

Solución:



- En la región pentagonal:

$$90° + 4\alpha + 90° + 144° = 180°(7-2)$$

$$\boxed{\alpha = 144°}$$

- En todo el polígono regular:

$$\alpha = \frac{180°(n-2)}{n} \rightarrow 144° = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$$\boxed{n = 10}$$

- Nos piden: $D_v = n \cdot v - \dfrac{(v+1)(v+2)}{2}$

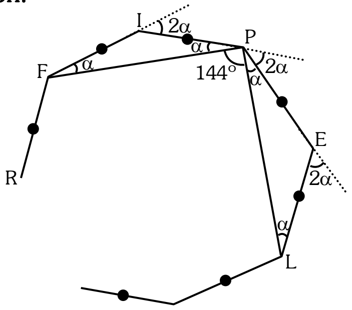
$$D_5 = 10 \cdot 5 - \frac{(5+1)(5+2)}{2}$$

$\boxed{D_5 = 29}$ Rpta.

15.- Se tiene un polígono regular R, F, I, P, E, L, … de "n" lados, tal que la $m\measuredangle FPL = 144$. Calcular su número de ángulos llanos a que equivale la suma de las medidas de sus ángulos internos.

a) 18 b) 17 c) 19
d) 16 e) 20

Solución:



- De la figura, en P:

$$4\alpha + 144° = 180° \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = 9°}$$

- El ángulo exterior del polígono medirá:

$$m\measuredangle e = 2\alpha$$

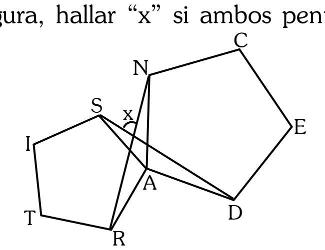
$$\frac{360°}{n} = 2(9°) \quad \boxed{n = 20}$$

- Nos piden: Nro. de Áng. llanos = n – 2

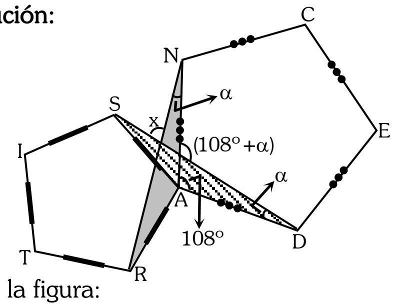
$\boxed{\text{Nro. de Áng. llanos} = 18}$ Rpta.

16.- De la figura, hallar "x" si ambos pentágonos son regulares.

a) 72°
b) 36°
c) 12°
d) 75°
e) 60°



Solución:



- De la figura:

$$\Delta ARN \cong \Delta SAD \text{ (L.A.L.)}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle ANR = m\measuredangle SDA = \alpha$$

- Luego, por propiedad:

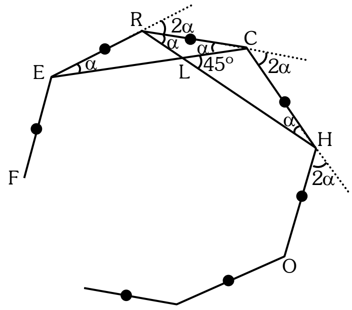
$$x + (108° + \cancel{\alpha}) = 180° + \cancel{\alpha}$$

$\boxed{x = 72°}$ Rpta.

17.- En el polígono regular F, E, R, C, H, O, … se sabe que la medida del menor ángulo formado por $\overline{EC}$ y $\overline{RH}$ es 45°. Calcular su número de diagonales medias.

a) 56 b) 20 c) 40
d) 28 e) 18

Solución:



- De la figura: $\Delta ERC \equiv \Delta RCH$

$$\Rightarrow m\measuredangle ECR = m\measuredangle CRH = \alpha$$

- En el ΔRCL: $2\alpha = 45°$

- También se puede observar que "2α" es la medida del ángulo exterior del polígono, luego:

$$m\measuredangle e = 45 \quad \rightarrow \quad \frac{360°}{n} = 45°$$

$$\boxed{n = 8}$$

- Nos piden:

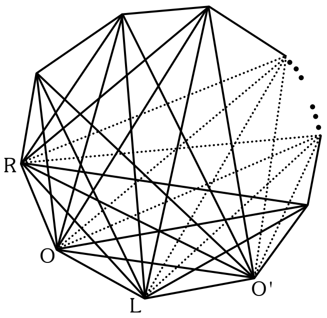
$$DM = \frac{n(n-1)}{2} \quad \rightarrow DM = \frac{8(8-1)}{2}$$

$\boxed{DM = 28}$ Rpta.

18.- ¿Cuál es la medida del ángulo exterior del polígono equiángulo en el cual desde cuatro vértices consecutivos se pueden trazar 17 diagonales?

a) 45° b) 36° c) 18°
d) 22°30' e) 30°

Solución:
Primera Forma:



Desde R $\rightarrow$ $(n-3)$ diagonales
Desde O $\rightarrow$ $(n-3)$ diagonales
Desde L $\rightarrow$ $(n-3)-1$ diag. (se contó $\overline{RL}$)
Desde O' $\rightarrow$ $(n-3)-2$ diag. (se contó $\overline{RO'}$ y $\overline{OO'}$).
- Sumando:

$$4n-15=17\text{, (según dato)}$$

$$\boxed{n=8}$$

- Nos piden: $\quad m\measuredangle e=\dfrac{360^\circ}{n}$

$$\boxed{m\measuredangle e=45^\circ}\text{ Rpta.}$$

Segunda Forma:

$$D_v=n\cdot v-\frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

- Por dato:

$$D_v=17 \quad , \quad v=4$$

- Reemplazando:

$$17=n\cdot 4-\frac{(4+1)(4+2)}{2}$$

$$\boxed{n=8}$$

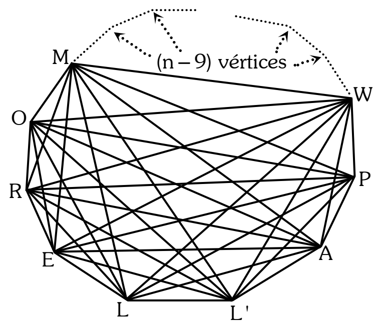
- Nos piden: $\quad m\measuredangle e=\dfrac{360^\circ}{n}$

$$\boxed{m\measuredangle e=45^\circ}\text{ Rpta.}$$

19.- En un polígono de "n" lados, desde $(n-9)$ vértices consecutivos se trazan $(2n+2)$ diagonales. Calcular "n".

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 14

Solución:
Primera Forma:



- Por dato, desde $(n-9)$ vértices consecutivos se trazan $(2n+2)$ diagonales.
- De la figura, se observa el número de diagonales trazados desde 9 vértices más la diagonal $\overline{MW}$.
- Desde los 9 vértices se trazan:

$$\frac{9(9-3)}{2}=27\text{ diagonales}$$

- Por condición del problema:

$$(2n+2)+27+1=\frac{n(n-3)}{2}$$

$$4n+60=n^2-3n \quad \rightarrow n^2-7n-60=0$$

$$(n-12)(n+5)=0$$

$$\boxed{n=12}\text{ Rpta.}$$

Segunda Forma:

$$D_v=n\cdot v-\frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

- Por dato:

$$D_v=2n+2 \quad ; \quad v=n-9$$

- Reemplazando:

$$2n+2=n(n-9)-\frac{\left[(n-9)+1\right]\left[(n-9)+2\right]}{2}$$

$$4n+4=2n^2-18n-\left[n^2-15n+56\right]$$

$$n^2-7n-60=0$$

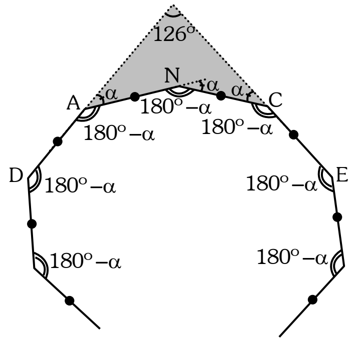
$$(n-12)(n+5)=0$$

$$\boxed{n=12}\text{ Rpta.}$$

20.- En un polígono regular de "n" lados D, A, N, C, E, … las prolongaciones de $\overline{DA}$ y $\overline{EC}$ se forman un ángulo cuya medida es 126°. Hallar $\left(\dfrac{n^2}{10}-\dfrac{n}{2}\right)$.

a) 40 b) 10 c) 30
d) 15 e) 20

Solución:



- En el cuadrilátero cóncavo:

$$\alpha + 126° + \alpha = 180° - \alpha$$

$$3\alpha = 54° \rightarrow \boxed{\alpha = 18°}$$

- Se observa que el ángulo exterior mide "α":

$$m\measuredangle e = 18° \quad \rightarrow \frac{360°}{n} = 18°$$

$$\boxed{n = 20}$$

- Nos piden: $x = \left(\frac{n^2}{10} - \frac{n}{2}\right)$

$$x = \left(\frac{20^2}{10} - \frac{20}{2}\right)$$

$\boxed{x = 30}$ Rpta.

20.- Hallar el número de diagonales medias del polígono convexo en el cual sus ángulos interiores se hallan en progresión aritmética de razón 5, siendo la medida del menor de los ángulos igual a 120°.

a) 15 b) 36 c) 56
d) 60 e) 120

Solución:

Primera Forma:

- Elaboramos el siguiente cuadro donde van las medidas de los ángulos interiores del polígono y las medidas de sus respectivos ángulos exteriores, verificando que la suma de las medidas de los ángulos exteriores sea 360° ya que por dato el polígono es convexo.

# de Vért.	**Áng. Interiores.**	**Áng. Exteriores**
1	120°	60°
2	125°	55°
3	130°	50°
4	135°	45°
5	140°	40°
6	145°	35°
7	150°	30°
8	155°	25°
9	160°	20°
	$S_{m\measuredangle e}$	**360°**

- Si el polígono tiene 9 vértices, también tendrá 9 lados.
- Nos piden:

$$DM = \frac{n(n-1)}{2} \quad \rightarrow \quad DM = \frac{9(9-1)}{2}$$

$\boxed{DM = 36}$ Rpta.

Segunda Forma:

- La suma de los términos de una progresión aritmética:

$$S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n \ \ldots \ (I)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \ \ldots \ (II)$$

a_1 : primer término de la P.A.

a_n : n - ésimo término de la P.A.

r : razón de la P.A.

n : número de términos de la P.A.

- Hallamos el n - ésimo término, en (II):

$$a_n = 120° + (n-1)5°$$

$$a_n = 115° + 5n \ \ldots \ (III)$$

- Reemplazamos (III) y (II):

$$S = \left(\frac{120° + (115° + 5n)}{2}\right)n$$

$$S = \frac{(235° + 5n)n}{2} \ \ldots \ (IV)$$

- Sabemos por fórmula:

$$S_{m\measuredangle i} = 180°(n-2) \ \ldots \ (V)$$

- Igualando (IV) y (V):

$$180°(n-2) = \frac{(235° + 5n)n}{2}$$

$$\boxed{n = 9}$$

- Nos piden:

$$DM = \frac{n(n-1)}{2} \quad \rightarrow \quad DM = \frac{9(9-1)}{2}$$

$\boxed{DM = 36}$ Rpta.

21.- Desde los puntos medios de cuatro lados consecutivos de un polígono equiángulo se han trazado 50 diagonales medias. Calcular el número de ángulos rectos al que equivale la suma de las medidas de los ángulos internos en el polígono mencionado.

a) 15 b) 20 c) 13
d) 26 e) 18

Solución:

- Sabemos:

$$DM_k = n \cdot k - \frac{k(k+1)}{2}$$

- Por dato:

$$DM_k = 50 \quad , \quad k = 4$$

- Reemplazando

$$50 = n \cdot 4 - \frac{4(4+1)}{2}$$

$$\boxed{n = 15}$$

- Nos piden:

$$\text{Nro de ángulos rectos} = 2(n-2)$$

$\boxed{\text{Nro de ángulos rectos} = 26}$ Rpta.

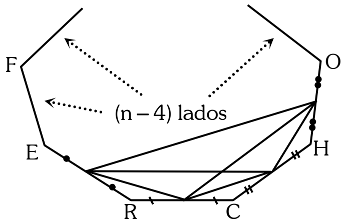
22.- En un polígono de "n" lados, desde $(n-4)$ lados consecutivos se trazan $(2n+1)$ diagonales medias. Calcular "n".

a) 5　　　b) 7　　　c) 9

d) 14　　　e) 18

Solución:

Primera Forma:



- Desde $(n-4)$ lados se han trazado ya $(2n+1)$ diagonales medias, sólo faltan trazar las diagonales de 4 lados.

- Desde los 4 lados trazaremos:

$$\frac{4(4-1)}{2}=6 \text{ diagonales medias.}$$

- Se deduce entonces:

Nro. Total de diagonales medias trazadas = Nro. de diagonales trazadas desde $(n-4)$ lados + Nro. de diagonales que faltan trazar de los 4 lados.

$$DM=(2n+1)+6$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=(2n+1)+6$$

$$n^2-5n-14=0$$

$$(n+2)(n-7)=0$$

$\boxed{n=7}$ Rpta.

Segunda Forma:

- Sabemos:

$$DM_k=n\cdot k-\frac{k(k+1)}{2}$$

- Por dato:

$$DM_k=2n+1 \quad , \quad k=n-4$$

- Reemplazando:

$$2n+1=n\cdot(n-4)-\frac{(n-4)\left[(n-4)+1\right]}{2}$$

$$4n+2=2n^2-8n-(n^2-7n+12)$$

$$n^2-5n-14=0$$

$$(n+2)(n-7)=0$$

$\boxed{n=7}$ Rpta.