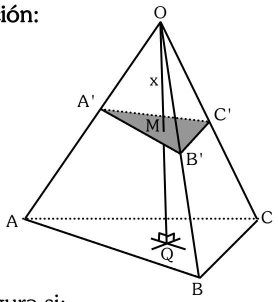
EJERCICIOS RESUELTOS DE PIRAMIDE Y CONO

01. Si: O–ABC es un tetraedro regular, además: $OA' = a$, $OB = b$, $OC' = c$ y $OM = x$, siendo $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Hallar "x".

a) 3 m b) 5 m c) 6 m
d) 7 m e) 10 m

Resolución:



En la figura si:

$V_{(O-A'B'M)} = V_1$; $V_{(O-B'C'M)} = V_2$

$V_{(O-C'A'M)} = V_3$; $V_{(O-ABC)} = V$

Además si: $OA = OB = OC = k$ y $OQ = H$

Entonces:

$$\frac{3V_1}{V} = \frac{abx}{Hk^2} \quad .... (\,I\,)$$

$$\frac{3V_2}{V} = \frac{bcx}{Hk^2} \quad ... (\,II\,)$$

$$\frac{3V_3}{V} = \frac{acx}{Hk^2} \quad .... (\,III\,)$$

Sumando: (I); (II) y (III)

$$3\left(\frac{V_1+V_2+V_3}{V}\right) = \frac{x}{Hk^2}(ab+bc+ac)$$

Pero: $\frac{V_1+V_2+V_3}{V} = \frac{abc}{k^3}$ y $H = \frac{k\sqrt{6}}{3}$

Reemplazando este último en lo anterior:

$$3,\left(\frac{abc}{k^3}\right) = \frac{x}{\left(\frac{k\sqrt{6}}{3}\right)k^2}(ab+bc+ac)$$

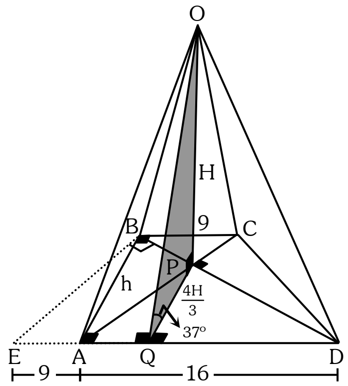
De donde: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{6}}{x}$

por dato: $\frac{\sqrt{6}}{x} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = \boxed{6\text{ m}}$ **Rpta.**

02. Hallar el volumen de una pirámide sabiendo que su base es un trapecio rectángulo de diagonales perpendiculares y bases 9 y 16 cm. el pie de la altura coincide con el punto de intersección de las diagonales y el ángulo diedro cuya arista es la base mayor del trapecio mide 37°.

a) 255 cm^3 b) 288 cm^3 c) 320 cm^3
d) 123 cm^3 e) 450 cm^3

Resolución:



Por datos: $BC = 9$ cm ; $AD = 16$ cm.

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ y $m\measuredangle OQP = 37°$

Se pide: Volumen de la pirámide O–ABCD, igual a "V". entonces:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{16+9}{2}\right)h.H$$

$$V = \frac{25}{6}hH \quad ... (\,I\,)$$

En el Δ rectángulo EBD por relaciones métricas:

$h^2 = 9\ (16)$

De donde: $h = 12$ ... (II)

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\frac{4H}{3}}{12-\frac{4H}{3}} = \frac{16}{9} \rightarrow H = \frac{144}{25} \quad ....(\,III\,)$$

Reemplazando (III) y (II) en (I):

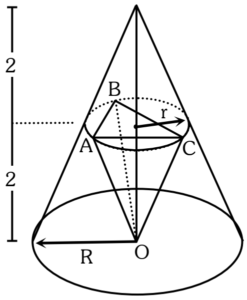
$$V = \frac{25}{6}\,.\,12\,.\,\frac{144}{25} \Rightarrow V = \boxed{288\ cm^3}$$ **Rpta.**

03. Calcular la longitud del radio de la base de un cono recto, sabiendo que su altura mide 4 m y que la arista del tetraedro regular inscrito en el cono mide $\sqrt{6}$ m. Un vértice el tetraedro está en el centro de la base y los otros tres están en la superficie lateral.

a) $2\sqrt{5}$ m b) $3\sqrt{7}$ m c) $2\sqrt{2}$ m

d) $8\sqrt{7}$ m e) $7\sqrt{3}$ m

Resolución:



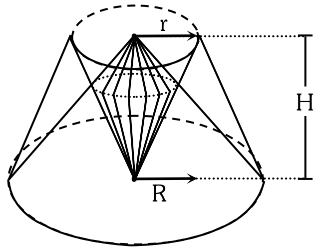
En la figura observamos el tetraedro regular O–ABC de arista cuya longitud es $\sqrt{6}$ m, entonces su altura mide 2 m. En el triángulo ABC:

$r\sqrt{3} = \sqrt{6} \rightarrow r = \sqrt{2}$

Luego por semejanza se tiene que:

$\dfrac{\sqrt{2}}{R} = \dfrac{2}{4} \rightarrow R = \boxed{2\sqrt{2}\text{ m}}$ **Rpta.**

04. En la figura se muestra un tronco de cono de revolución de altura cuya longitud es H y radios R y r. Hallar el volumen del cuerpo que es la intersección de los conos cuyos vértices son los centros de las bases.

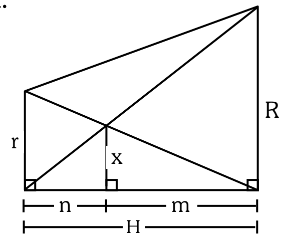


a) $\dfrac{\pi H}{3}\left[\dfrac{Rr}{R+r}\right]^2$ b) $\dfrac{\pi H}{5}\left[\dfrac{Rr}{R-r}\right]^2$

c) $\dfrac{\pi H}{3}\left[\dfrac{Rr}{2R+r}\right]^2$ d) $\dfrac{\pi H}{2}\left[\dfrac{3Rr}{2R+r}\right]^2$

e) $\dfrac{\pi H}{3}\left[\dfrac{5Rr}{2R+r}\right]^2$

Resolución:



Del sólido geométrico se obtiene el siguiente trapecio rectángulo en donde x es la longitud del radio de la base común de los dos conos determinados por intersección.

Luego por semejanza: $x = \dfrac{Rr}{R+r}$

Además si V_1 y V_2 son los volúmenes de los conos de la misma base obtenidos por intersección.

Entonces:

$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi x^2 n$ .... (I)

$V_2 = \dfrac{1}{3}\pi x^2 m$ .... (II)

Sumando: (I) y (II)

$V_1 + V_2 = \dfrac{1}{3}\pi x^2 (m+n)$

$V_1 + V_2 = \boxed{\dfrac{\pi H}{3}\left[\dfrac{Rr}{R+r}\right]^2}$ **Rpta.**

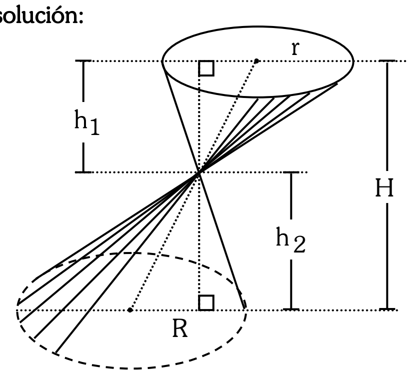
05. Calcular el volumen de dos conos oblícuos unidos por sus vértices y tal que sus generatrices sean una prolongación de otra recíprocamente, además las dos bases están en planos paralelos. Se conocen las longitudes de los radios de las bases r y R y la distancia de los planos de las bases es H.

a) $\frac{\pi H}{4}\left(R^2 - Rr + r^2\right)^2$ b) $\frac{\pi H}{3}\left(R^2 - Rr + r^2\right)^2$

c) $\frac{\pi H}{6}\left[\frac{Rr}{2R + r}\right]^2$ d) $\frac{\pi H}{3}\left(R^2 - Rr + r^2\right)$

e) $\frac{\pi H}{3}\left[\frac{5Rr}{2R + r}\right]^2$

Resolución:



De la figura:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi R^2 h_2 \quad \ldots. \text{ (I)}$

Pero: $h_1 + h_2 = H$

Además por semejanza: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{r}{R}$

De lo cual obtenemos:

$h_1 = \frac{rH}{R + r}$ y $h_2 = \frac{RH}{R + r}$

Reemplazando estas últimas expresiones en (I)

Tenemos: $V = \frac{\pi H}{3}\left(\frac{R^3 + r^3}{R + r}\right)$

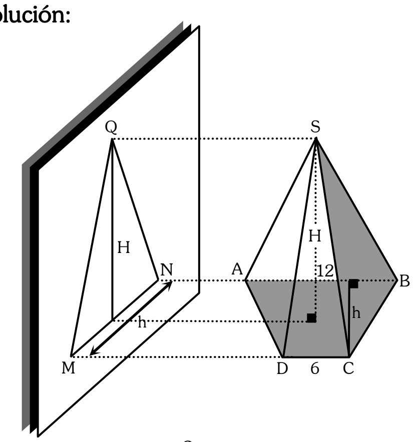
Simplificando: $V = \boxed{\frac{\pi H}{3}\left(R^2 - Rr + r^2\right)}$ **Rpta.**

06. En una pirámide S–ABCD, la base ABCD es un trapecio $\left(\overline{AB} // \overline{CD}\right)$, si este sólido se proyecta sobre un plano perpendicular a $\overline{AB}$, el área proyectada es $20\ m^2$. Calcular el volumen de la pirámide, sabiendo que $AB = 12\ m$ y $CD = 6\ m$.

a) $150\ m^3$ b) $120\ m^3$ c) $100\ m^3$

d) $145\ m^3$ e) $170\ m^3$

Resolución:



Datos: $S_{MQN} = 20\ m^2$

$AB = 12\ m$ y $CD = 6\ m$

Se pide: $V_{S-ABCD} = V$

De la figura:

$\frac{h\,.\,H}{2} = 20 \rightarrow h\,.\,H = 40 \quad \ldots \text{ (I)}$

Además: $V = \left(\frac{12 + 6}{2}\right) h\,.\,H\,.\,\frac{1}{3} \quad \ldots \text{ (II)}$

Reemplazando (I) en (II)

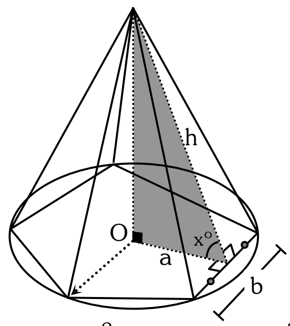
$V = 3(40) = \boxed{120\ m^3}$ **Rpta.**

07. En una pirámide pentagonal regular, el área total es $30\ cm^2$ y el área lateral es $20\ cm^2$. Hallar el valor del diedro que forma la cara lateral con la base.

a) 40º b) 50º c) 60º

d) 80º e) 45º

Resolución:



Datos: $A_{ST} = 30\ cm^2$ y $A_{SL} = 20\ cm^2$

Entonces: $A_{Base} = 10\ cm^2$

De la figura: $5\left(\frac{bh}{2}\right) = 20 \rightarrow bh = 8 \quad \ldots \text{ (I)}$

Además: $5\left(\frac{ab}{2}\right) = 10 \rightarrow ab = 4 \quad \ldots \text{ (II)}$

Dividiendo (II) entre (I):

$\frac{ab}{bh} = \frac{4}{8} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{h} = \frac{1}{2}$

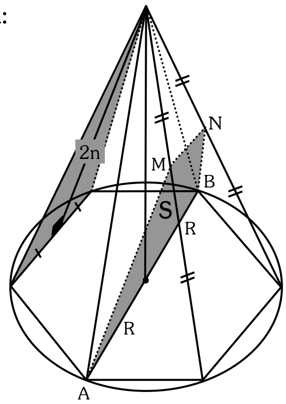
En consecuencia: $x = \boxed{60º}$ **Rpta.**

08. El área lateral de una pirámide hexagonal regular mide $20\ m^2$. Hallar el área de la sección paralela a la cara lateral que pasa por el centro de la base de la pirámide.

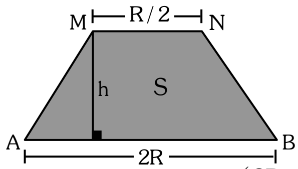
a) $\dfrac{24}{3}m^2$ b) $\dfrac{25}{6}m^2$ c) $\dfrac{33}{5}m^2$

d) $\dfrac{17}{6}m^2$ e) $\dfrac{18}{5}m^2$

Resolución:



AMNB es un trapecio isósceles:



$$S = \frac{(2R + R/2)}{2}h$$

$$S = \frac{5}{4}Rh \quad \ldots.\ (\text{I})$$

Además por dato:

$$A_{SL} = 20 = 6\frac{(R\,.\,2h)}{2}$$

$$Rh = \frac{10}{3} \quad \ldots.\ (\text{II})$$

Reemplazando (II) en (I):

$$S = \frac{5}{4}\cdot\frac{10}{3}$$

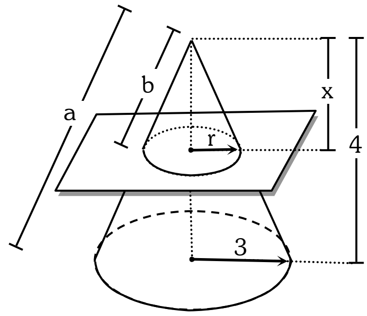
$$S = \boxed{\frac{25}{6}\ m^2}$$ **Rpta.**

09. La altura de un cono recto es igual a 4 m y el radio de su base es igual a 3 m. Calcular a que distancia de su vértice se debe intersecar dicho cono por un plano paralelo a la base para que la superficie total del pequeño cono obtenido sea equivalente a la superficie lateral del cono dado.

a) $\sqrt{11}$ m b) $\sqrt{10}$ m c) $\sqrt{7}$ m

d) $\sqrt{15}$ m e) $\sqrt{13}$ m

Resolución:



Si la superficie total del cono pequeño obtenido es equivalente a la superficie lateral del cono dado, entonces sus áreas son iguales, es decir:

$$\pi r^2 + \pi r b = \pi(3)a$$

$$r(r + b) = 3a \quad \ldots\ (\text{I})$$

Por semejanza:

$$\frac{r}{3} = \frac{x}{4} \;\rightarrow\; r = \frac{3}{4}x \quad \ldots.\ (\text{II})$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 3^2 + 4^2 \;\rightarrow\; a = 5 \quad \ldots.\ (\text{III})$$

$$b^2 = x^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \;\rightarrow\; b = \frac{5}{4}x \quad \ldots.\ (\text{IV})$$

Reemplazando (III); (IV) y (II) en (I)

$$\frac{3}{4}x.\left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x\right) = 3(5)$$

$$x = \boxed{\sqrt{10}\ m}$$ **Rpta.**