EJERCICIOS RESUELTOS DE MCD Y MCM

Problema 01
¿Cuántos divisores comunes tienen los números: 5040; 6720 y 12600?

a) 16 b) 20 c) 32
d) 40 e) 24

Solución:
Para calcular la cantidad de divisores comunes de 5040; 6720 y 12600, se siguen los dos pasos siguientes:

1.-Se halla el M.C.D.
2.-Se halla la cantidad de divisores del M.C.D.

Es decir:

$$\left.\begin{array}{ccccc|c} 5040 & - & 6720 & - & 12600 & 2 \\ 2520 & & 3360 & & 6300 & 2 \\ 1260 & & 1680 & & 3150 & 2 \\ 630 & & 840 & & 1575 & 3 \\ 210 & & 280 & & 525 & 5 \\ 42 & & 56 & & 105 & 7 \\ 6 & & 8 & & 15 & \end{array}\right\} \text{M.C.D.}$$

$\therefore$ $\text{M.C.D.} = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$

$\#D_{\text{M.C.D.}} = (3+1)(1+1)(1+1)(1+1)$

$\#D_{\text{M.C.D.}} = 4\times2\times2\times2 = \boxed{32}$ **Rpta.**

Problema 02
¿Cuál es el menor número que tiene como divisores a: 48; 90 y 96? Dar como respuesta la cifra de mayor orden del número calculado.

a) 1 b) 2 c) 4
d) 3 e) 5

Solución:
Para calcular el menor número que contenga a 48;90 y 96, basta con calcular el M.C.M. de dichos números.

$$\left.\begin{array}{ccccc|c} 48 & - & 90 & - & 96 & 2 \\ 24 & & 45 & - & 48 & 3 \\ 8 & & 15 & & 16 & 2 \\ 4 & & 15 & & 8 & 2 \\ 2 & & 15 & & 4 & 2 \\ 1 & & 15 & & 2 & 2 \\ 1 & & 15 & & 1 & 15 \\ 1 & & 1 & & 1 & \end{array}\right\} \text{M.C.M.}$$

$\text{M.C.M.} = 2\times3\times2\times2\times2\times2\times15$
$\text{M.C.M.} = 1440$

Nos piden la cifra de mayor orden: $\boxed{1}$ **Rpta.**

Problema 03
Calcular el M.C.D. de A, B y C

$$A = 21^4 \times 12^3$$
$$B = 42^2 \times 24^3$$
$$C = 36^2 \times 63^2$$

a) 96×42^2 b) 54×42^3 c) 6×42^4
d) 27×42^3 e) 108×42^2

Solución:
Descomponiendo canónicamente cada número:

$A = (3\times7)^4\left(3\times2^2\right)^3 = 2^6\times3^7\times7^4$

$B = (2\times3\times7)^2\left(3\times2^3\right)^3 = 2^{11}\times3^5\times7^2$

$C = \left(2^2\times3^2\right)\left(3^2\times7\right)^2 = 2^4\times3^6\times7^2$

$\therefore$ $\text{M.C.D.}(A,B,C) = 2^4\times3^5\times7^2$

$\text{M.C.D.}(A,B,C) = 2^2\times3^3\times(2\times3\times7)^2$

$\text{M.C.D.}(A,B,C) = \boxed{108\times42^2}$ **Rpta.**

Problema 04
Siendo: $A = 12\times15^n$
$B = 15\times12^n$

Además: M.C.D. $(A,B) = 1620$

Hallar el valor de "n" $(n>1)$

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

Solución:

Descomponiendo canónicamente A y B

$A = \left(2^2\times3\right)(3\times5)^n = 2^2\times3^{n+1}\times5^n$

$B = (3\times5)\left(2^2\times3\right)^n = 2^{2n}\times3^{n+1}\times5$

$\therefore$ $\text{M.C.D.}(A,B) = 2^2\times3^{n+1}\times5 = 20\times3^{n+1}$

Del dato:

$20\times3^{n+1} = 1620$

$3^{n+1} = 81 = 3^4$

$n+1 = 4 \rightarrow n = \boxed{3}$ **Rpta.**

Problema 05
Hallar "n" en los números:

$$A = 45 \times 60^n$$
$$B = 60 \times 45^n$$

Para que se cumpla:
M.C.M. $(A,B) = 12$ M.C.D. (A,B)

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

Solución:

Descomponiendo canónicamente A y B

$$A = (3^2 \times 5)(2^2 \times 3 \times 5)^n = 2^{2n} \times 3^{n+2} \times 5^{n+1}$$
$$B = (2^2 \times 3 \times 5)(3^2 \times 5)^n = 2^2 \times 3^{2n+1} \times 5^{n+1}$$

Luego:

$$\text{M.C.D.}(A,B) = 2^2 \times 3^{n+2} \times 5^{n+1}$$
$$\text{M.C.M.}(A,B) = 2^{2n} \times 3^{2n+1} \times 5^{n+1}$$

Del dato:

$$2^{2n} \times 3^{2n+1} \times 5^{n+1} = 12\left[2^2 \times 3^{n+2} \times 5^{n+1}\right]$$
$$2^{2n} \times 3^{2n+1} \times 5^{n+1} = 12\left[2^2 \times 3^{n+2} \times 5^{n+1}\right]$$
$$2^{2n} \times 3^{2n+1} \times 5^{n+1} = 2^4 \times 3^{n+3} \times 5^{n+1}$$

Luego:

$2n = 4 \rightarrow n = 2$
$2n + 1 = n + 3 \rightarrow n = 2$

$\boxed{2}$ **Rpta.**

Problema 06
Hallar dos números cuyo M.C.D. es 12, sabiendo además que los cocientes sucesivos para hallar el M.C.D. por divisiones sucesivas fueron: 1; 2; 2; 3; 3.

a) 672 y 1144 b) 144 y 948
c) 873 y 948 d) 672 y 948
e) 565 y 346

Solución:

Sean A y B los números, tal que A > B, donde:

$$\text{M.C.D.}(A,B) = 12$$

Completando el algoritmo de Euclides de derecha a izquierda.

	1	2	2	3	3
A	B	276	120	36	12
	276	120	36	12	0

$B = 2 \times 276 + 120 = 672$
$A = 1 \times 672 + 276 = 948$

$\boxed{672 \text{ y } 948}$ **Rpta.**

Problema 07
Si el máximo común divisor de dos números A y B es $\overline{ab}$, sabiendo que los cocientes sucesivos que se obtuvieron al hallar el M.C.D. por divisiones sucesivas han sido: 5; 4; 3 y 2.
Además: $A + B = 5797$. Hallar $(a + b)$

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

Solución:

Del enunciado: $\text{M.C.D.}(A,B) = \overline{ab}$
Completando el algoritmo de Euclides de derecha a izquierda.

	5	4	3	2
A	B	$7\overline{ab}$	$2\overline{ab}$	$\overline{ab}$
	$7\overline{ab}$	$2\overline{ab}$	$\overline{ab}$	0

$B = 4 \times 7\overline{ab} + 2\overline{ab} = 30\overline{ab}$
$A = 5 \times 30\overline{ab} + 7\overline{ab} = 157\overline{ab}$

Además del dato:

$$A + B = 5797$$
$$157\overline{ab} + 30\overline{ab} = 5797$$
$$187\overline{ab} = 5797$$
$$\overline{ab} = 31$$

Luego:

$a + b = \boxed{4}$ **Rpta.**

Problema 08

Hallar la suma de dos números si se sabe que en el cálculo del M.C.D. por el "Algoritmo de Euclides" se obtuvieron como cocientes sucesivos: 3; 1; 2 y 4; además el M.C.M. de dichos números es 1872.

a) 183 b) 122 c) 61
d) 305 e) 244

Solución:

Sea: $\text{M.C.D.}(A,B) = d$

Además: $\text{M.C.M.}(A,B) = 1872$

Completando:

	3	1	2	4
A	B	9d	4d	d
	9d	4d	d	0

$B = 1 \cdot 9d + 4d = 13d$
$A = 3 \cdot 13d + 9d = 48d$

Se sabe:

$A \cdot B = (\text{M.C.D.}(A,B))(\text{M.C.M.}(A,B))$

Luego: $13d \cdot 48d = 1872d$

Resolviendo: $d = 3$

$\therefore\ B = 13(3) = 39$

$A = 48(3) = 144$

Nos piden: $A + B = \boxed{183}$ **Rpta.**

Problema 09

Hallar $(x+y)$ sabiendo que los cocientes sucesivos para calcular el máximo común divisor por el Algoritmo de Euclides de los números:

$\overline{(x-2)(y+1)0}$ y $\overline{(x+1)xy}$ fueron:

1 ; 1 ; 1 ; 3 y 2

a) 11 b) 13 c) 15
d) 12 e) 9

Solución:

Sea:

$d = \text{M.C.D.}\left[\overline{(x-2)(y+1)0}, \overline{(x+1)xy}\right]$

Luego, completando el algoritmo de Euclides (de derecha a izquierda) tenemos:

Nota: $\overline{(x+1)xy} > \overline{(x-2)(y+1)0}$

	1	1	1	3	2
$\overline{(x-1)xy}$	$\overline{(x-2)(y+1)0}$	9d	7d	2d	d
	9d	7d	2d	d	0

$\overline{(x-2)(y+1)0} = 16d \ \ldots(1)$

$\overline{(x+1)xy} = 25d \ \ldots(2)$

De (1) se observa que: $x > 2$

De (2) se deduce que:

$\overline{(x+1)xy} = \overset{\circ}{25} \rightarrow \overline{xy} = 75$

$x = 7 \qquad y = 5$

Luego: $x + y = \boxed{12}$ **Rpta.**

Problema 10
La suma de dos números es 972 y al determinar el M.C.D. por el Algoritmo de Euclides se obtienen los restos 30; 7; a; b; 0 donde la diferencia entre a y b es 1. Hallar el mayor de los números si los dos primeros cocientes son iguales.

a) 815 b) 637 c) 429
d) 324 e) 157

Solución:
Del enunciado: $A+B=972 \quad \ldots(\alpha)$
Además:

	q	q	q_3	q_4	q_5
A	B	30	7	a	b
	30	7	a	b	0

Luego:
$B=30q+7 \qquad \ldots(1)$
$A=qB+30 \qquad \ldots(2)$

Reemplazando (2) en (α):
$$(qB+30)+B=972$$
$$B(q+1)=942$$
De (1):
$$(30q+7)(q+1)=942$$
$$(30q+7)(q+1)=157\times 6$$
$$q+1=6 \quad \rightarrow \quad q=5$$
$$\therefore \; B=30q+7=157$$
$$A=972-157=\boxed{815} \;\; \textbf{Rpta.}$$

Problema 11
Hallar dos números primos entre sí, que se diferencian en 7 unidades y que además su M.C.M. es 330. Dar como respuesta la suma de cifras del menor de dichos números.

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

Solución:

Si A y B son "primos entre si" (PESI), entonces:
$$\text{M.C.D.}(A,B)=1$$
$$\text{M.C.M.}(A,B)=A\cdot B$$
Luego, del enunciado:
$$\left.\begin{array}{r} A-B=7 \\ A\cdot B=330 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} A=22 \\ B=15 \end{array}$$
Nos piden la suma de cifras de B, es decir:
$$1+5=\boxed{6} \;\; \textbf{Rpta.}$$

Problema 12
El cociente de dos números es 13, si el M.C.M. de A y B es 312. Calcular la suma de dichos números.

a) 346 b) 354 c) 336
d) 356 e) 332

Solución:
Si "A" es múltiplo de B" (A>B), entonces:
$$\text{M.C.D.}(A,B)=B \rightarrow \text{menor}$$
$$\text{M.C.M.}(A,B)=A \rightarrow \text{mayor}$$
Luego, del enunciado:
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A}{B}=13 \rightarrow \left(A=\overset{\circ}{B}\right) \\ A=312 \end{array}\right\} B=\frac{312}{13}=24$$
Nos piden: $A+B=\boxed{336}$ **Rpta.**

Problema 13
La suma de dos números es 224 y su M.C.D. es 28. Hallar la diferencia de dichos números (una de las soluciones).

a) 124 b) 84 c) 112
d) 56 e) 28

Solución:

Sean A y B dos números, siendo $A>B$ y además: $\text{M.C.D.}(A,B)=d$, entonces:
$$A=dq_1 \;\; \wedge \;\; B=dq_2$$
(siendo q_1 y q_2 "primos entre si")
En el problema:
$A+B=224 \qquad \ldots(1)$
$d=28$
$\therefore \; A=28q_1 \qquad B=28q_2$

Reemplazando en (1):
$$28q_1+28q_2=224$$
$$q_1+q_2=8 \qquad (q_1>q_2)$$
$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 7 & 1 \\ 5 & 3 \end{array}$$
Se presentan 2 soluciones:
$$\left.\begin{array}{l} A=28(7)=196 \\ B=28(1)=28 \end{array}\right. \rightarrow A-B=168$$
$$\left.\begin{array}{l} A=28(5)=140 \\ B=28(3)=84 \end{array}\right. \rightarrow A-B=\boxed{56} \;\; \textbf{Rpta.}$$

Problema 14

El producto de dos números es 2100 y su M.C.D. es 10. Hallar la diferencia de dichos números.

a) 80 b) 70 c) 60
d) 50 e) 40

Solución:

Del enunciado:

$A \cdot B = 2100 \qquad \ldots(1)$

$d = 10$

Sabemos que: $A = dq_1 \qquad B = dq_2$

Luego: $A = 10q_1 \qquad B = 10q_2$

Reemplazando en (1):

$(10q_1)(10q_2) = 2100$

$q_1 \cdot q_2 = 21 \qquad (q_1 > q_2)$

q_1	q_2
21	1
7	3

Se presentan 2 soluciones:

$A = 10(21) = 210$, $B = 10(1) = 10$ $\rightarrow A - B = 200$

$A = 10(7) = 70$, $B = 10(3) = 30$ $\rightarrow A - B = \boxed{40}$ **Rpta.**

Problema 15

La razón de dos números A y B es 45/20, si el M.C.M. (A,B) = 900. Hallar "A".

a) 275 b) 225 c) 200
d) 325 e) 175

Solución:

Sean A y B dos números, luego:

$M.C.D.(A,B) = d$

$M.C.M.(A,B) = m$

Además:

$A = dq_1 \quad \wedge \quad B = dq_2$

Se cumple:

$$m = dq_1q_2$$

En el problema:

$$\frac{A}{B} = \frac{45}{20} \rightarrow \frac{dq_1}{dq_2} = \frac{45}{20}$$

Como q_1 y q_2 son "PESI", entonces:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{9}{4} \rightarrow \begin{cases} q_1 = 9 \\ q_2 = 4 \end{cases}$$

$$m = dq_1q_2$$
$$900 = d \cdot 9 \cdot 4$$
$$d = 25$$

Finalmente: $A = 25(9) = \boxed{225}$ **Rpta.**

Problema 16

La suma de números es 540 y su M.C.D. es 45. Hallar la diferencia de dichos números.

a) 455 b) 120 c) 101
d) 225 e) 125

Solución:

$A + B = 540$ se sabe que $A = mcd \times \alpha \rightarrow A = 45\alpha$, $B = mcd \times \beta \rightarrow B = 45\beta$

$45(\alpha + \beta) = 540$

$(\alpha + \beta) = 12$ como alfa y beta deben de ser primos entre si elegimos los siguientes valores para ambos.

$\alpha = 11$ y 7

$\beta = 1$ y 5

luego se tiene dos respuestas

$A - B = 45 \times (11 - 1) = 450$

$A - B = 45 \times (7 - 2) = 225$

$\boxed{225}$ **Rpta.**