EJERCICIOS RESUELTOS DE ESFERAS

01. Calcular el volumen del segmento esférico mostrado, si su altura mide 1 m; mientras que $\overline{AB}$ mide $2\sqrt{2}$ m.

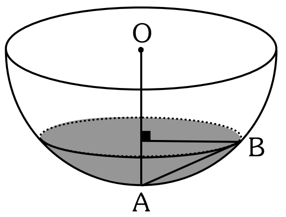
a) $\frac{13}{5}\pi\ m^3$

b) $\frac{17}{5}\pi\ m^3$

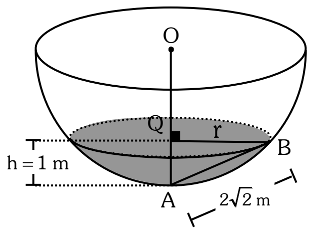
c) $\frac{11}{3}\pi\ m^3$

d) $\frac{17}{3}\pi\ m^3$

e) $\frac{13}{7}\pi\ m^3$



Resolución:



Se sabe que el volumen de un segmento esférico de una base; esta dada por la siguiente expresión:

$$V = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r^2 h}{2}$$

Reemplazando datos:

$$V = \frac{\pi(1)^3}{6} + \frac{\pi\left(\sqrt{7}\right)^2(1)}{2}$$

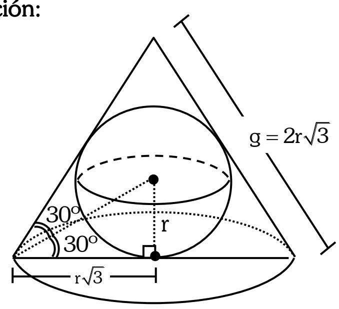
$$V = \boxed{\frac{11}{3}\pi\ m^3}$$ **Rpta.**

02. Halla el área de una esfera inscrita en un cono equilátero de 81 m^2 de área total.

a) $\frac{85\pi}{2}\ m^2$ b) $\frac{72\pi}{7}\ m^2$ c) $\frac{52\pi}{3}\ m^2$

d) 36 m^2 e) $\frac{67\pi}{24}\ m^2$

Resolución:



* Si es un cono equilátero, la longitud del diámetro de la base es igual a la longitud de la generatriz.

* Dato: $A_{T_{cono}} = 81$

$$A_L + A_b = 81$$

$$\pi(r_{cono})g + \pi(r_{cono})^2 = 81$$

$$\pi\left(r\sqrt{3}\right)\left(2r\sqrt{3}\right) + \pi\left(r\sqrt{3}\right)^2 = 81$$

$$\pi r^2 = 9 \quad \ldots (\text{I})$$

* Nos piden:

$$A_{Sup.Esf.} = 4\pi r^2 \quad \ldots\ldots (\text{I})$$

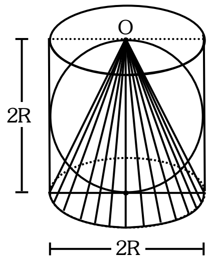
* De (I) y (II): $A_{Sup.Esf.} = \boxed{36\ m^2}$ **Rpta.**

03. Se tiene una esfera maciza de metal y un cono macizo de metal, el cual resulta ser el mayor de os conos que se puede inscribir en el menor cilindro que contiene a la esfera indicada al sumergir completamente la esfera en otro recipiente cilíndrico con agua, el nivel del agua sube 6 cm. ¿Cuántos centímetros subirá el nivel del agua, al sumergirse completamente a la vez la esfera y el cono?

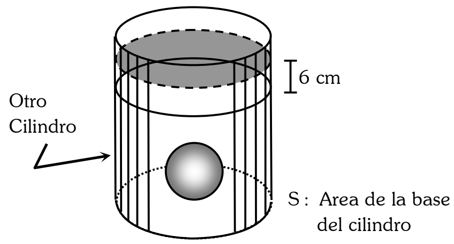
a) 7 cm b) 8 cm c) 9 cm

d) 10 cm e) 12 cm

Resolución:



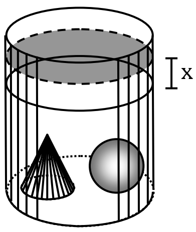
El menor cilindro que contiene a la esfera no es sino aquel cilindro circunscrito a dicha esfera.
Ahora el mayor de los conos es aquel como se muestra en el gráfico.
Por otro lado, según los datos del problema tenemos el gráfico siguiente:



En donde el volumen del agua que sube será igual al volumen de la esfera; es decir:

$$S(6) = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad .... \text{(I)}$$

Ahora veremos el último caso, es decir cuando al sumergir completamente a la vez la esfera y el cono, el nivel del agua subirá "x" centímetros:
De igual manera como lo anterior el volumen del agua que sube será igual a la suma de volúmenes de la esfera y del cono



Del gráfico se tiene que:

$$S(x) = \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{2\pi R^3}{3}$$

$S(x) = 2\pi R^3 \quad .... \text{(II)}$

Dividiendo (I) entre (II)

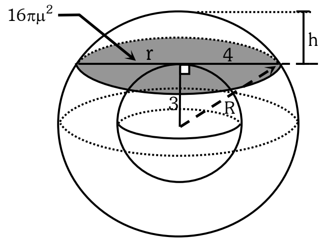
$$\frac{S(6)}{S(x)} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} \rightarrow \frac{6}{x} = \frac{2}{3}$$

De donde: $x = \boxed{9 \text{ cm.}}$ **Rpta.**

04. Se tienen dos esferas concéntricas, se traza un plano secante a la esfera mayor y tangente a la esfera menor, determinando un círculo de $16\pi u^2$ de área. Calcular el área del casquete menor formado en la esfera mayor sabiendo que el radio de la esfera menor mide 3u.

a) $10\pi u^2$ b) $12\pi u^2$ c) $15\pi u^2$
d) $18\pi u^2$ e) $20\pi u^2$

Resolución:



Por dato: $\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow \boxed{r = 4}$
Se observa un triángulo notable de 37º y 53º.
De donde: $R = 5$ y $h = 2$
Recordando el área del casquete

$$\boxed{A_{Casq.} = 2\pi Rh}$$

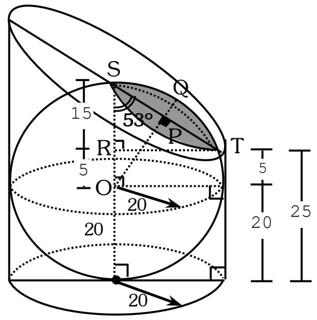
$$A_{Casq.} = 2\pi(5)(2)$$

$$A_{Casq.} = \boxed{20\pi u^2}$$ **Rpta.**

05. La generatriz menor de un tronco de cilindro recto mide 25m. y el radio de su base 20m., dentro del sólido se encuentra ubicada parcialmente una esfera de radio 20m., una parte de la cual sobresale por encima de la base superior del tronco, el polo sur de la esfera es el centro de la base del tronco y el polo norte de la esfera es el centro de la base superior. Hallar el área del casquete esférico que sobresale fuera del tronco.

a) 80π b) 100π c) 120π
d) 140π e) 160π

Resolución:



Haciendo los trazos mostrados, vemos que:

$RT = 20$ y $RS = 15$

En el triángulo rectángulo.

RST es notable $(37° \text{ y } 53°)$

$\Rightarrow \boxed{m(\sphericalangle RST) = 53°}$

Entonces la $m(\sphericalangle SOQ) = 37°$

Ahora en el triángulo rectángulo OPS:

$OP = 16$

Si $OQ = 20$ (radio)

$\Rightarrow PQ = 4$ (altura del casquete)

Nos piden:

$A_{Casq.} = 2\pi Rh$

$= 2\pi(20)(4)$

$A_{Casq.} = \boxed{160\pi\ u^2}$ **Rpta.**

06. Hallar el volumen de un tronco de cilindro que tiene una semiesfera inscrita.

Si: $AB = 6$ m y $CD = 4$ m

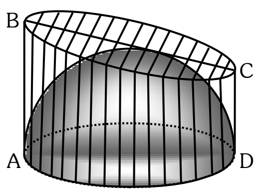
a) $110\pi\ m^3$

b) $170\pi\ m^3$

c) $150\pi\ m^3$

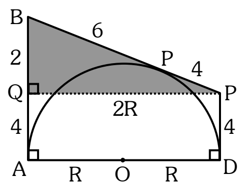
d) $140\pi\ m^3$

e) $120\pi\ m^3$



Resolución:

Si lo representamos en un plano:



En el triángulo rectángulo BQC:

$10^2 = 2^2 + (2R)^2 \rightarrow R = 2\sqrt{6}$

Luego el volumen del tronco de cilindro será:

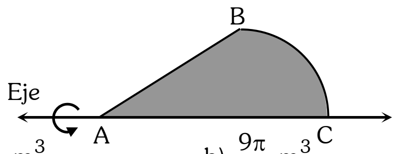
$V = \pi R^2 \cdot e$

Donde: $e = \dfrac{AB + CD}{2}$

Luego: $V = \pi\left(2\sqrt{6}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{6+4}{2}\right)$

$V = \boxed{120\pi\ m^3}$ **Rpta.**

07. Calcular el volumen que genera la superficie del triángulo mixtilineo ABC, siendo "B" punto de tangencia, $m\sphericalangle BAC = 30°$, además el centro del arco BC se encuentra sobre el eje de giro. $AC = 3$ m.



a) $\dfrac{5\pi}{2}\ m^3$

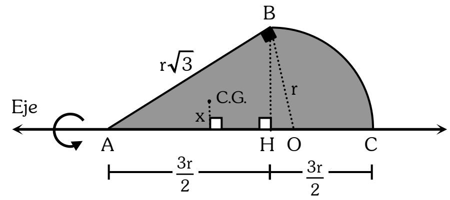
b) $\dfrac{9\pi}{2}\ m^3$

c) $\dfrac{7\pi}{2}\ m^3$

d) $\dfrac{3\pi}{2}\ m^3$

e) $\dfrac{15\pi}{2}\ m^3$

Resolución:



Si se conoce que:

V_1 = volumen del sector esférico generado por el sector circular BOC

V_2 = volumen del sólido generado por la región triangular ABO

V_x = volumen pedido

Por el teorema de Pappus y Guldin:

$\boxed{V_2 = 2\pi \cdot x \cdot S_{ABC}}$

Luego: $Vx = V_1 + V_2$

$Vx = \dfrac{2}{3}\pi r^2\left(\dfrac{3r}{2}\right) + 2\pi x \cdot S_{ABC}$

$Vx = \pi r^3 + 2\pi\left(\dfrac{r}{6}\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{r^2\sqrt{3}}{2}\right)$

$Vx = \dfrac{3\pi r^2}{2}$, pero: $r = 1$ m

$Vx = \boxed{\dfrac{3\pi}{2}\ m^3}$ **Rpta.**

08. Hallar el área de la superficie del triángulo esférico ABC en el casquete esférico si la longitud del radio de la esfera es 2 m. La longitud de la circunferencia DBE es 10 m y la medida del diedro que forman los círculos máximos ABF y ACF es 26°, $\pi = 3,14$

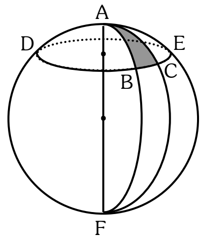
a) $0,7367\ m^2$

b) $0,7165\ m^2$

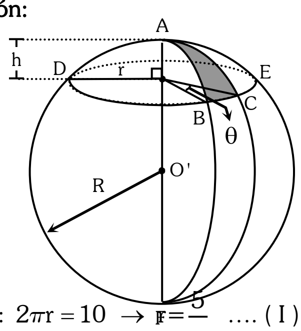
c) $0,6367\ m^2$

d) $0,8897\ m^2$

e) $0,1456\ m^2$



Resolución:



Por dato: $2\pi r = 10 \rightarrow r = \dfrac{5}{\pi}$ .... (I)

Por el teorema de las cuerdas en la circunferencia máxima de la esfera:

$r^2 = h(2R - h)$ ... (II)

Reemplazamos (I) en (II) y $R = 2$ (dato):

$h^2 - 4h + \dfrac{25}{\pi^2} = 0$

De donde: $h = \begin{cases} 3,21 \\ 0,79 \end{cases}$

Luego: $h = 0,79$ .... (I)

Además: $S_{ABC} = \dfrac{2.\pi.R.h.\theta}{360°}$ ...... (II)

Reemplazando (I) en (II)

$S_{ABC} = \dfrac{2(3,14)(2)(0,79)(26°)}{360°}$

$S_{ABC} = \boxed{0,7165\ m^2}$ **Rpta.**

09. Hallar el volumen generado, al rotar la siguiente superficie alrededor del eje $\overleftrightarrow{xx'}$, si: $R = 2$ m.

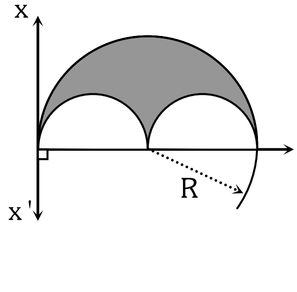
a) $3\pi^2\ m^3$

b) $5\pi^2\ m^3$

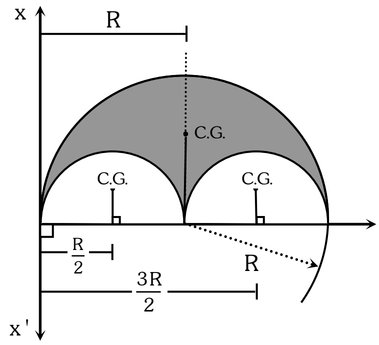
c) $4\pi^2\ m^3$

d) $7\pi^2\ m^3$

e) $9\pi^2\ m^3$



Resolución:



Sea: "V" el volumen generado al rotar por el semicírculo de radio R.

Además: V_1 y V_2 los volúmenes generados al rotar por los semicírculos de radios $\dfrac{R}{2}$.

Luego el volumen pedido será V_X:

$Vx = V - (V_1 + V_2)$

Por el teorema de Pappus y Guldin

$Vx = 2\pi R\left(\dfrac{\pi R^2}{2}\right) - \left[\pi R\left(\dfrac{\pi R^2}{8}\right) + 3\pi R\left(\dfrac{\pi R^2}{8}\right)\right]$

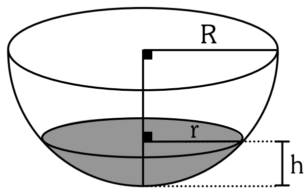
$Vx = \boxed{4\pi^2\ m^3}$ **Rpta.**

10. Calcular la longitud de la altura de una zona esférica de una base en una superficie esférica cuyo radio mide 8 m, de modo que el área de la superficie de ésta zona aumentada en el área de la base sea igual a los 7/16 del área de la superficie esférica.

a) 3 m b) 4 m c) 8 m

d) 10 m e) 12 m

Resolución:



Área de la zona esférica $= 2\pi Rh$

Por dato se conoce que:

$2\pi Rh + \pi r^2 = \dfrac{7}{16}(4\pi R^2)$ .... (I)

Además: $r^2 = h(2R - h)$ .... (II)

De (I) y (II) obtenemos:

$h^2 - 4Rh + \dfrac{7R^2}{4} = 0$

Pero: $R = 8$ m (dato)

Entonces: $h^2 - 32h + 112 = 0$

De donde: $h = \boxed{4\ m}$ **Rpta.**