EJERCICIOS RESUELTOS DE AREAS DE REGIONES SOMBREADAS

01. Hallar DB, si el área sombreada es $13m^2$, además $CO = 8m$ y $CB = 10m$.

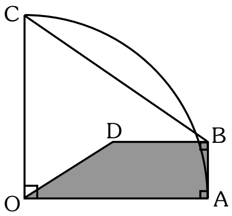
a) 2 m

b) 4 m

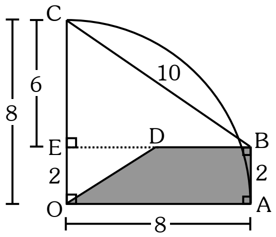
c) 3 m

d) 5 m

e) 6 m



Resolución:

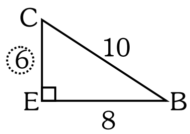


Se observa que:

$CO = OA = 8$

$OA = EB = 8$

En el triángulo rectángulo notable CEB



Del gráfico:

* $CO = CE + EO$

$8 = 6 + EO \Rightarrow EO = 2$

* $EO = AB = 2$

El área sombreada es:

$$\left(\frac{OA + BD}{2}\right) AB = 13$$

$$\left(\frac{8 + DB}{\cancel{2}}\right) \cancel{2} = 13$$

$8 + DB = 13 \Rightarrow DB = \boxed{5m}$ **Rpta.**

02. Hallar el área de la región sombreada. Si $OE = EB = \sqrt{3}$, además: $\overline{OA} = \overline{OB}$.

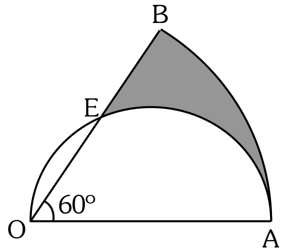
a) $\dfrac{3\pi\sqrt{3}}{2}$

b) $5\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

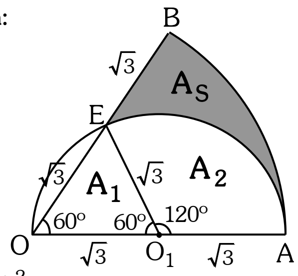
c) $\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

d) $\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{2}$



Resolución:



$$A_1 = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \qquad \text{(triángulo equilátero)}$$

$$A_2 = \frac{\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 120^\circ}{360^\circ} \qquad \text{(sector circular)}$$

Del gráfico podemos decir:

$A_1 + A_2 + A_S = \text{Área}\ (\text{sector AOB})$

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 \cancel{120^\circ}}{\cancel{360^\circ}} + A_S = \frac{\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cancel{60^\circ}}{\cancel{360^\circ}}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\cancel{3}\pi}{\cancel{3}} + A_S = \frac{\cancel{12}\pi}{\cancel{6}}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} + \pi + A_S = 2\pi$$

$$A_S = \boxed{\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}}$$ **Rpta.**

03. Si: $r = 2m$. Calcular el área de la región sombreada.

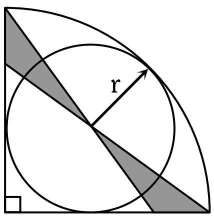
a) $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2}$

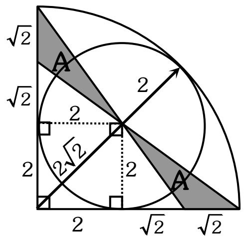
c) $4\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{4}$

e) $4\sqrt{2}$



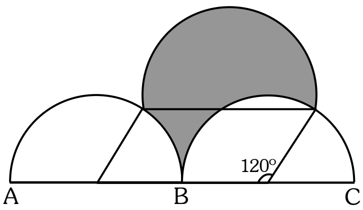
Resolución:



$$A = \frac{\sqrt{2}\left(\cancel{2}\right)}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$$

Piden: $2A = 2\left(\sqrt{2}\right) = \boxed{2\sqrt{2}}$ **Rpta.**

04. De la figura mostrada, sobre el lado mayor del paralelogramo se ha trazado un semicírculo, calcule el área de la región sombreada.



a) $r^2\sqrt{3}$

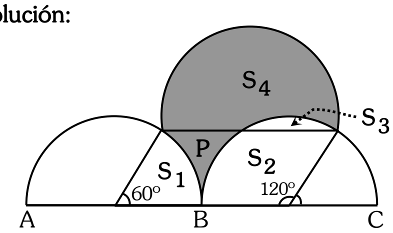
b) $r^2\left(\sqrt{2}+1\right)$

c) $r^2\sqrt{2}$

d) $r^2\sqrt{5}$

e) $(r+1)^2\sqrt{3}$

Resolución:



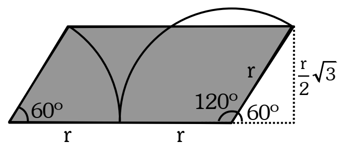
$S_{sombreada} = P + S_4$ ..... (I)

$S_{semicirculo} = S_4 + \cancel{S_3} = S_1 + S_2 + \cancel{S_3}$

$$S_4 = S_1 + S_2$$

Reemplazando en (I)

$S_{sombreada} = P + S_1 + S_2$ (paralelogramo)



$$S_{sombreada} = 2r\left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$= \boxed{r^2\sqrt{3}}$$ **Rpta.**

05. En el siguiente gráfico, hallar la diferencia de las superficies de las regiones sombreadas, si $AB = 6\sqrt{5}$ cm

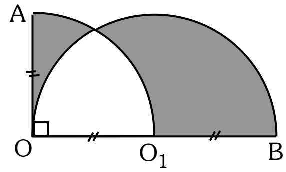
a) $9\pi\ cm^2$

b) $8\pi\ cm^2$

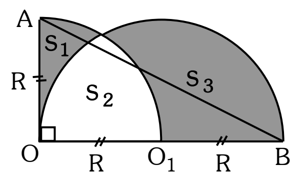
c) $6\pi\ cm^2$

d) $5\pi\ cm^2$

e) $4\pi\ cm^2$



Resolución:



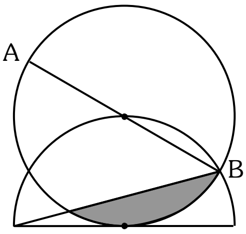
$$S_2 + S_3 = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$-\left[S_1 + S_2\right] = -\left[\frac{\pi R^2}{4}\right]$$

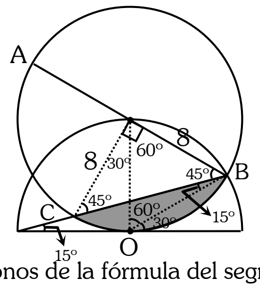
$$S_3 - S_1 = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} = \boxed{\frac{\pi R^2}{4}}$$ **Rpta.**

06. Calcular el área sombreada en el grafico mostrado si la cuerda máxima $AB = 8$ cm y "O" centro de la semicircunferencia.

a) $4(\pi - 2)$ cm^2
b) $2(\pi - 2)$ cm^2
c) $3(\pi - 2)$ cm^2
d) $5(\pi - 2)$ cm^2
e) $6(\pi - 2)$ cm^2



Resolución:



Recordándonos de la fórmula del segmento circular:

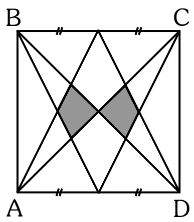
$$S_{\text{sombreada}} = \frac{\pi 8^2 (90^\circ)}{360^\circ} - \frac{8(8)}{2}$$

$$= 16\pi - 32$$

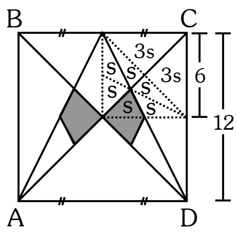
$$= \boxed{16(\pi - 2)}$$ **Rpta.**

07. Hallar el área de la región sombreada en el cuadrado de lado 12 cm.

a) 10 cm^2
b) 12 cm^2
c) 15 cm^2
d) 18 cm^2
e) 22 cm^2



Resolución:



Del grafico se tiene que:

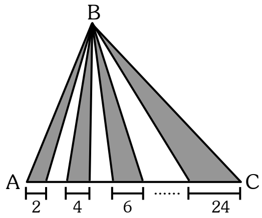
$12S = 6^2 \Rightarrow S = 3$

Piden el valor de:

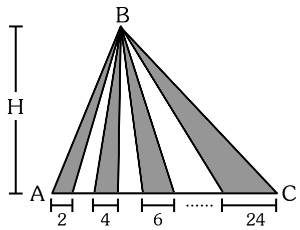
$4S = 4(3) = \boxed{12 \text{ cm}^2}$ **Rpta.**

08. En el grafico, hallar el área de la región sombreada si el triangulo ABC es de altura "H"

a) 65 H
b) 78 H
c) 55 H
d) 90 H
e) 45 H



Resolución:



* Nótese que la altura "H" es común para todos los triángulos

* El área sombreada total será la suma de las áreas sombreadas parciales

$$A_S = \frac{2 \times H}{2} + \frac{4 \times H}{2} + \frac{6 \times H}{2} + \ldots.. + \frac{24 \times H}{2}$$

$$= H + 2H + 3H + \ldots.. + 12H$$

$$= H\left(\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots.. + 12}\right)$$

$$= H\left[\frac{12(12+1)}{2}\right] = 78H$$

$$= \boxed{78H}$$ **Rpta.**

09. En el cuadrado de lado "L" hallar el área de la región sombreada

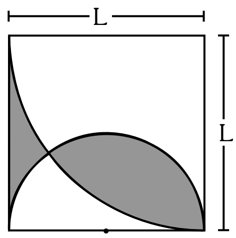
a) $\dfrac{34\pi L^2}{250}$

b) $\dfrac{37\pi L^2}{153}$

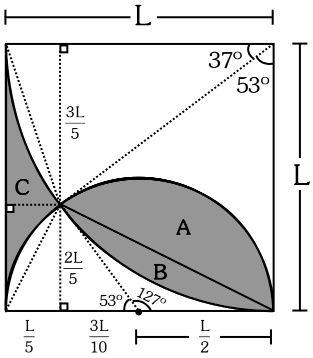
c) $\dfrac{23\pi L^2}{240}$

d) $\dfrac{56\pi L^2}{230}$

e) $\dfrac{71\pi L^2}{19}$



Resolución:



$$A=\frac{\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 127^\circ}{360^\circ}-\frac{\frac{L}{2}\left(\frac{2L}{5}\right)}{2}$$

$$=\frac{\pi L^2 127^\circ}{1440^\circ}-\frac{L^2}{10}$$

$$B=\frac{\pi L^2 53^\circ}{360^\circ}-\frac{L\left(\frac{4L}{5}\right)}{2}$$

$$=\frac{\pi L^2 53^\circ}{360^\circ}-\frac{2L^2}{5}$$

$$C=\frac{L.\left(\frac{L}{5}\right)}{2}-\left[\frac{\pi L^2 37^\circ}{360^\circ}-\frac{L\left(\frac{3L}{5}\right)}{2}\right]-\left[\frac{\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 53^\circ}{360^\circ}-\frac{\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2L}{5}\right)}{2}\right]$$

$$=\frac{L^2}{10}-\left[\frac{\pi L^2 37^\circ}{360^\circ}-\frac{3L^2}{10}\right]-\left[\frac{\pi L^2 53^\circ}{1440^\circ}-\frac{L^2}{10}\right]$$

$$S_{\text{Sombreada}}=A+B+C$$

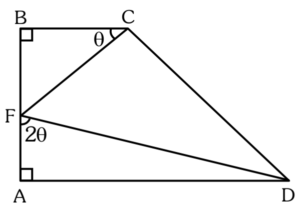
$$=\frac{\pi L^2 127^\circ}{1440^\circ}-\frac{L^2}{10}+\frac{\pi L^2 53^\circ}{360^\circ}-\frac{2L^2}{5}+\frac{L^2}{10}-\left[\frac{\pi L^2 37^\circ}{360^\circ}-\frac{3L^2}{10}\right]-\left[\frac{\pi L^2 53^\circ}{1440^\circ}-\frac{L^2}{10}\right]$$

$$=\frac{\pi L^2 127^\circ}{1440^\circ}+\frac{\pi L^2 53^\circ}{360^\circ}-\frac{\pi L^2 37^\circ}{360^\circ}-\frac{\pi L^2 37^\circ}{360^\circ}$$

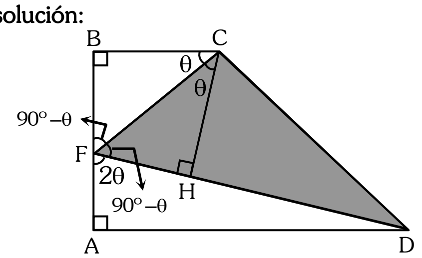
$$\text{Área pescadito}==\boxed{\frac{23\pi L^2}{240}}\ \textbf{Rpta.}$$

10. En el trapecio rectángulo mostrado $BC=3\ m$, $FD=8\ m$ y $m\measuredangle AFD=2m\measuredangle BCF$, Calcular el área del triángulo CFD.

a) $12\ m^2$
b) $10\ m^2$
c) $25\ m^2$
d) $16\ m^2$
e) $14\ m^2$



Resolución:



Por dato: $BC=3$ y $FD=8$
El área del triángulo FCD es:

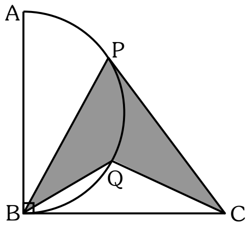
$$S_{FCD}=\frac{FD\times CH}{2}\ \ldots(\text{ I })$$

Deducimos que $\overline{CF}$ es bisectriz del ángulo BCH, luego $BC=CH=3$
Reemplazando en (I)

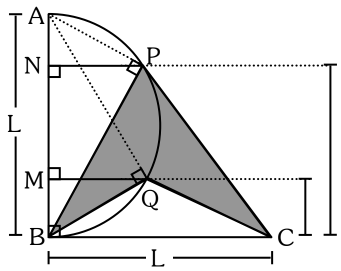
$$S_{FCD}=\frac{8\times 3}{2}=\boxed{12\ m^2}\ \textbf{Rpta.}$$

11. Determinar el área de la región sombreada si se cumple que: $BP^2-BQ^2=64\ m^2$

a) $32\ m^2$
b) $16\ m^2$
c) $10\ m^2$
d) $18\ m^2$
e) $15\ m^2$



Resolución:



El área sombreada se determina por:

$$S=\frac{L\times BN}{2}-\frac{L\times BM}{2}$$

$$S=\frac{L}{2}(BN-BM)\ \ldots(\text{ I })$$

En la semicircunferencia, se observan triángulos rectángulos, aplicaremos relaciones métricas.

* En el Δ rectángulo APB

$BP^2=BN\times L\ \ldots(\text{ I })$

* En el Δ rectángulo AQB

$BQ^2=BM\times L\ \ldots(\text{ II })$

Restando (I) y (II)

$BP^2-BQ^2=BN\times L-BM\times L$

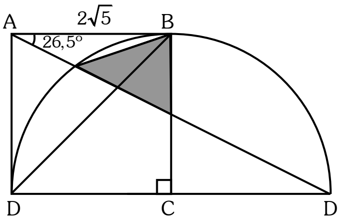
$64=L\times(BN-BM)\ \ldots(\text{ II })$

Reemplazando (II) en (I)

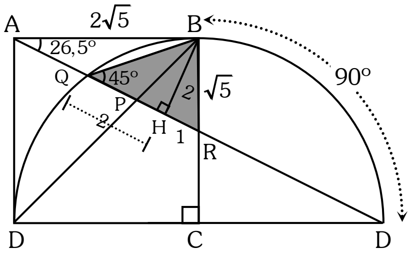
$$S=\frac{64}{2}=\boxed{32\ m^2}\ \textbf{Rpta.}$$

12. En el gráfico adjunto determinar el valor del área sombreada, si ABCD es un cuadrado.

a) $3\ m^2$
b) $5\ m^2$
c) $6\ m^2$
d) $7\ m^2$
e) $8\ m^2$



Resolución:



En el Δ rectángulo notable ABR (26,5°–63,5°)

Si: $AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow BR=\sqrt{5}$ y $AR=5$

En el Δ rectángulo notable ABH (26,5°–63,5°)

Si: $AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{BH=2}$ y $AH=4$

También se observa que:

$AR - AH = HR$

$5 - 4 = HR \Rightarrow \boxed{HR=1}$

En el Δ rectángulo notable QBH (45°–45°)

Si: $BH = 2 \Rightarrow \boxed{QH=2}$

El área sombreada será:

$$S = \frac{QR \times BH}{2} = \frac{(2+1)\times 2}{2}$$

$S = \boxed{3\ m^2}$ **Rpta.**

13. Hallar el área sombreada si ABCD es un rectángulo de perímetro 16 m, siendo P y Q los centros de los cuadrados mostrados

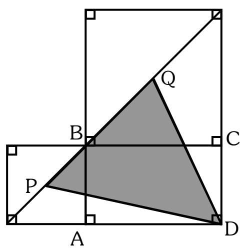
a) $16\ m^2$

b) $14\ m^2$

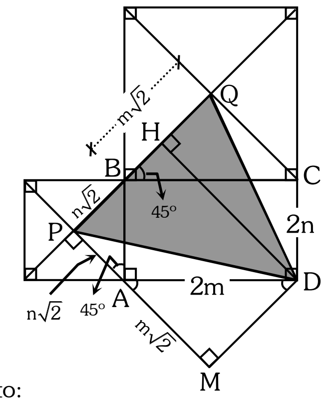
c) $13\ m^2$

d) $10\ m^2$

e) $8\ m^2$



Resolución:



Por dato:

$4m + 4n = 16$

$m + n = 4 \quad \ldots (\text{I})$

En el Δ rectángulo notable APB (45°–45°)

$AB = 2n \Rightarrow PA=PB=n\sqrt{2}$

En el Δ rectángulo notable BQC (45°–45°)

$BC = 2m \Rightarrow BQ=QC=m\sqrt{2}$

El área sombreada será:

$$S = \frac{PQ \times HD}{2} = \frac{\left(n\sqrt{2}+m\sqrt{2}\right)\left(n\sqrt{2}+m\sqrt{2}\right)}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}(m+n)^2}{2} = (m+n)^2 \quad \text{de (I)}$$

$S = 4^2 = \boxed{16\ m^2}$ **Rpta.**

14. En el cuadrado ABCD de lado 2 cm. Hallar el área sombreada si APD y CQD son triángulos equiláteros.

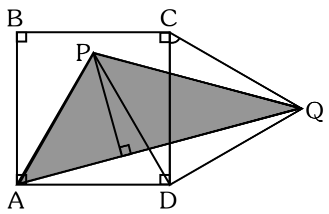
a) $1+\sqrt{3}$

b) $2+\sqrt{3}$

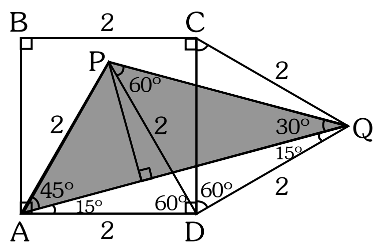
c) $1+2\sqrt{3}$

d) $2+3\sqrt{3}$

e) $5+\sqrt{3}$



Resolución:



El área del triángulo APQ es:

$$S = \frac{AQ \times PH}{2} \ \ldots.. (\text{I})$$

$\Delta ADQ : m\measuredangle DAQ = m\measuredangle AQD = 15°$

$\Delta PQD : m\measuredangle DPQ = m\measuredangle PQD = 45°$

$\Delta AHP : AP = 2 \Rightarrow AH = PH = \sqrt{2}$

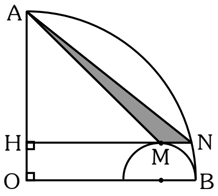
$\Delta PHQ : PH = \sqrt{2} \Rightarrow HQ = \sqrt{6}$

Reemplazando en (I)

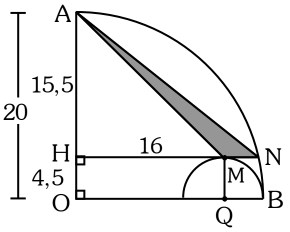
$S = \boxed{1+\sqrt{3}}$ **Rpta.**

15. En la figura se muestra un cuadrante AOB y una circunferencia de modo que $OH=4,5$ y $MH=16$. Calcular el área del triángulo MAN.

a) 32
b) 45
c) 54
d) 64
e) 90



Resolución:



Se sabe que $OH=4,5$ y $MH=16$

El área del triángulo AMN es:

$$S=\frac{MN\times AH}{2}\quad \ldots (\,I\,)$$

En el rectángulo OHMQ se tiene que:

$OQ=HM=16$ y $QM=OH=4,5$

Luego: $OB=OA=OQ+QB=20,5$

Entonces: $AH=AO-OH=16$

Δ OHN: $HN^2=ON^2-OH^2$

$HN^2=(20,5)^2-(4,5)^2 \Rightarrow HN=20$

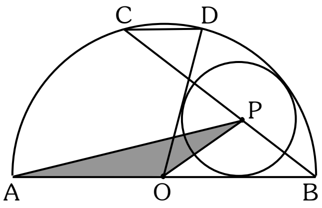
Luego: $MN=HN-HM=4$

Reemplazando en (I):

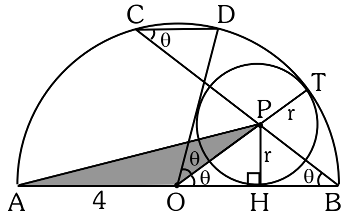
$S=\boxed{32\ m^2}$ Rpta.

16. En la figura se muestra una semicircunferencia de diámetro AB y una circunferencia de centro P. Calcular el área del triángulo APO si $AO=BO=4$ y $\overline{CD}\,//\,\overline{AB}$.

a) $2\ m^2$
b) $3\ m^2$
c) $5\ m^2$
d) $6\ m^2$
e) $4\ m^2$



Resolución:



Se sabe que: $AO=B==4$ y $\overline{CD}\,//\,\overline{AB}$

El área del triángulo APO es:

$$S=\frac{AO\times PH}{2}\quad \ldots . (\,I\,)$$

Como: $\overline{CD}\,//\,\overline{AB}$

$\Rightarrow$ $m\measuredangle OBC=m\measuredangle BCD=\theta$

El ángulo central BOD es igual al arco BD y este es el doble del ángulo BCD, es decir 2θ.

El triángulo OPB es isósceles, luego:

$OH=BH=2$

Δ OHP: $OH^2+PH^2=OP^2$

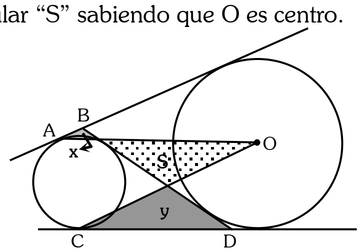
$2^2+r^2=(4-r)^2$

$r=\frac{3}{2}$

Reemplazando en (I)

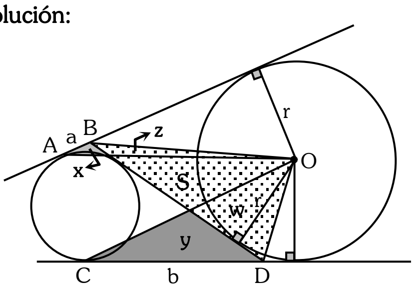
$S=\frac{4\left(\frac{3}{2}\right)}{2}=\boxed{3\ m^2}$ **Rpta.**

17. En la figura mostrada se cumple que $x+y=20\ cm^2$. Calcular "S" sabiendo que O es centro.



a) $10\ cm^2$ b) $20\ cm^2$ c) $30\ cm^2$
d) $40\ cm^2$ e) $50\ cm^2$

Resolución:



Se conoce que: $x + y = 20\ cm^2$

$$\text{área}\ (ABO) = x + z = \frac{a \times r}{2} \quad \ldots (\ I\ )$$

$$\text{área}\ (CDO) = y + w = \frac{b \times r}{2} \quad \ldots (\ II\ )$$

$$\text{área}\ (BOD) = z + s + w = \frac{BD \times r}{2}$$

Pero: $BD = BT + TD = BA + CD$

$BD = a + b$

Luego:

$$z + s + w = \frac{(a+b)r}{2} \quad \ldots (\ III\ )$$

Reemplazando (I) y (II) en (III)

$z + s + w = x + z + y + w$

$S = x + y$

$S = \boxed{20\ cm^2}$ **Rpta.**

18. En el gráfico mostrado hallar el área sombreada, si el lado del cuadrado es 6 m.

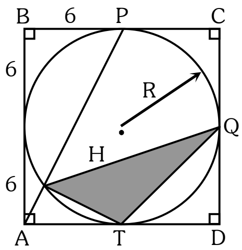
a) $\frac{3}{5}R^2$

b) $\frac{7}{5}R^2$

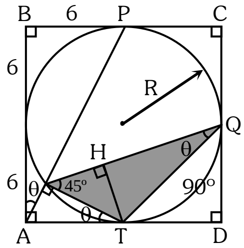
c) $\frac{2}{5}R^2$

d) $\frac{2}{7}R^2$

e) $\frac{6}{5}R^2$



Resolución:



Se sabe que el radio de la circunferencia es “6”

El área del triángulo FQT es:

$$S = \frac{FQ \times TH}{2} \quad \ldots.\ (\ I\ )$$

Δ FHT: FH=TH=k

Δ ABP: AB=2BP $\Rightarrow$ $\theta = \frac{53°}{2}$

$$m\measuredangle FQT = \frac{mFT}{2} = m\measuredangle ATF = m\measuredangle BAP = \theta$$

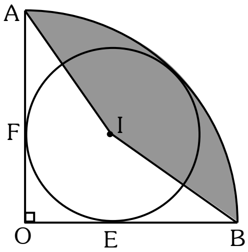
Δ THQ: HQ=2TH=2k

$TQ = k\sqrt{5} \Rightarrow 6\sqrt{2} = k\sqrt{5}$

De donde: $k = \frac{6\sqrt{10}}{5}$, Reemplazando en (I)

$$S = \frac{(3k)(k)}{2} = \frac{3}{2}k^2 = \boxed{\frac{3}{5}R^2}$$ **Rpta.**

19. Determinar el área sombreada si $EF = 6\sqrt{2}$, siendo “I” el entro de la circunferencia.



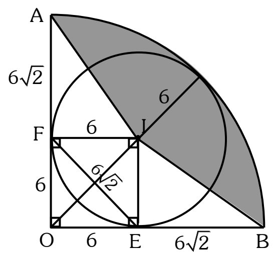
a) $9\left(3\pi - 4 - 2\sqrt{2}\right)$
b) $4\left(3\pi - 5 - 2\sqrt{2}\right)$

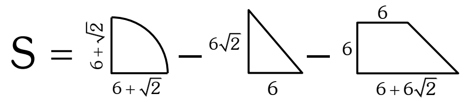
c) $8\left(3\pi - 4 - 2\sqrt{2}\right)$
d) $6\left(2\pi - 5 - 2\sqrt{2}\right)$

e) $3\left(5\pi - 5 - 3\sqrt{2}\right)$

Resolución:

En el cuadrado OFIE : $FE = OI = 6\sqrt{2}$





$$S = \frac{\pi\left(6+6\sqrt{2}\right)^2}{4} - \frac{6\times 6\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{6+6\sqrt{2}+6}{2}\right)6$$

$$= \frac{108\pi - 144 - 72\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{108\pi - 144 - 72\sqrt{2}}{4}$$

$$= \boxed{9\left(3\pi - 4 - 2\sqrt{2}\right)}$$ **Rpta.**