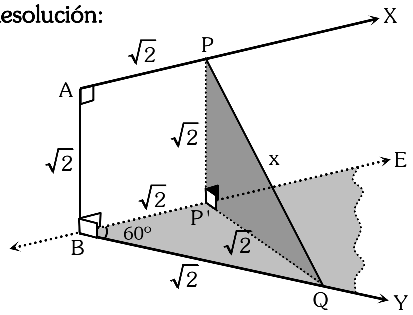
EJERCICIOS RESUELTOS DE ANGULOS DIEDROS Y POLIEDROS

01. Se tienen los rayos $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{BY}$ que se cruzan formando un ángulo que mide 60° y cuya perpendicular común es $\overline{AB}$. Sobre $\overrightarrow{AX}$ se ubica el punto P y sobre $\overrightarrow{BY}$ el punto Q, tal que $AP = AB = BQ = \sqrt{2}$ m. Hallar PQ.

a) 1 m b) 2 m c) 3 m
d) 4 m e) 5 m

Resolución:



Dato: $AP = AB = BQ = a$

Los rayos $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{BY}$ e el espacio forman el ángulo que mide 60°.

Menor distancia entre dichos rayos es $\overline{AB}$

Se traza la recta $\overleftrightarrow{BE} // \overleftrightarrow{AX}$, entonces la $m\measuredangle EBQ = 60°$.

Luego se traza $\overline{PP'} // \overline{AB}$, entonces $\overline{PP'} \perp \overline{BE}$; ($\Delta$ BP'Q es equilatero).

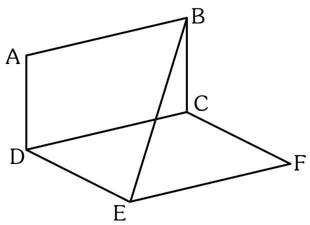
Finalmente en el triángulo rectángulo PP'Q:

$x = a\sqrt{2}$; donde $a = \sqrt{2}$ m

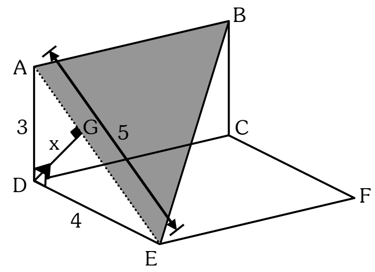
$x = \boxed{2 \text{ m.}}$ **Rpta.**

02. En la figura mostrada, los rectángulos son perpendiculares, si $AD = 3$ m y $DE = 4$ m. Calcular la menor distancia entre $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$.

a) 2 m
b) 2,4 m
c) 3 m
d) 5 m
e) 6 m



Resolución:



Datos: $AD = 3$ m y $DE = 4$ m, además el diedro $\overline{CD}$ mide 90°, luego en el triángulo rectángulo ADE: $AE = 5$ m

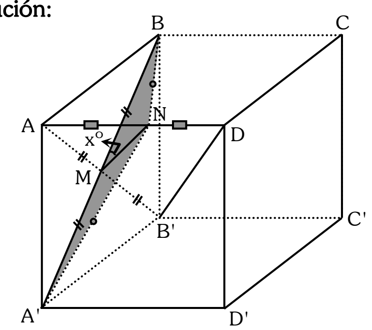
Se traza $\overline{DE} \perp$ al plano ABE; pero como $\overline{BE}$ pertenece a dicho plano, entonces $\overline{DG} \perp BE$, luego la mínima distancia entre $\overline{CD}$ y $\overline{BE}$ es $\overline{DG}$, en el triángulo rectángulo ADE; por relaciones métricas: $(3)(4) = 5x$

De donde: $x = \boxed{2{,}4 \text{ m}}$ **Rpta.**

03. En un cubo ABCD – A'B'C'D', calcular la medida del ángulo que forman las rectas $\overleftrightarrow{A'B}$ y $\overleftrightarrow{B'D}$

a) 45° b) 60° c) 90°
d) 120° e) 45°

Resolución:



Se traza en primer lugar AB', luego se ubica el punto medio M de $\overline{AB'}$ y se toma N punto medio de $\overline{AD}$, luego se une con A' y B, pero $BN = NA'$ entonces el Δ A'BN es isósceles, en donde $\overline{MN}$ será altura, en consecuencia $x = 90°$. En el Δ ADB', MN es la base media, entonces $\overline{MN} // \overline{B'D'}$, la medida del ángulo que forman las rectas $\overleftrightarrow{A'B}$ y $\overleftrightarrow{B'D}$ es:

$x = \boxed{90°}$ **Rpta.**

04. Hallar la fórmula general que nos dé el número de diagonales d un poliedro regular no contenidas en los planos de sus caras, en función del número de caras y del número de lados de cada cara.

a) $\dfrac{C(n-2)\left[C(n-2)-4n+6\right]}{8}+1$

b) $\dfrac{C(n-3)\left[C(n-2)-4n+6\right]}{8}+1$

c) $\dfrac{C(n-2)\left[C(n-2)-3n+6\right]}{8}+1$

d) $\dfrac{C(n-2)\left[C(n-1)-4n+7\right]}{8}+1$

e) $\dfrac{C(n-1)\left[C(n-5)-4n+3\right]}{8}+1$

Resolución:

Llámenos:

"V" $\rightarrow$ número de vértices

"C" $\rightarrow$ número de caras

"A" $\rightarrow$ número de aristas

"n" $\rightarrow$ número de lados de cada cara.

Al unir cada vértice con todos los demás; y como cada segmento se cuenta dos veces, el número total de segmentos será $\dfrac{v(v-1)}{2}$; pero de este número hay que restar A (número de aristas) y $C.\dfrac{n(n-3)}{2}$ número de diagonales de todas las caras; luego se tendrá:

$$D=\frac{v(v-1)}{2}-A-C.\frac{n(n-3)}{2}\quad \dots (\text{ I })$$

Pero sabemos que: $A=\dfrac{n\,.C}{2}$

Además: $C+V=A+2$ (Teorema de Euler)

De donde: $V=A-C+2$

$$V=\frac{nC}{2}-C+2\quad \dots (\text{ II })$$

Reemplazando (II) en (I) y simplificando se tiene:

$$D=\boxed{\frac{C(n-2)\left[C(n-2)-4n+6\right]}{8}+1}\ \textbf{Rpta.}$$

05. En la figura mostrada se tiene un cubo, si A, B, C y D son puntos medios, calcular la medida del ángulo que forman $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

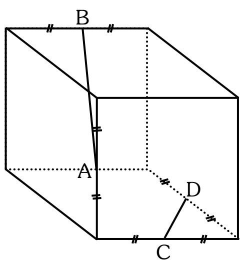
a) 45°

b) 60°

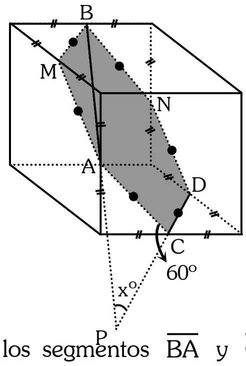
c) 90°

d) 30°

e) 45°



Resolución:



Al prolongar los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$ se determina el ángulo que forman dichos segmentos; cuya medida es x°.

Estos segmentos pertenecen al plano AMBNDC que justamente en un hexágono regular.

Por lo tanto en el triángulo rectángulo

PAC: $x+60°=90°$

$x=\boxed{30°}$ **Rpta.**

06. En la figura mostrada, se tiene un cubo de arista cuya longitud es $\sqrt{3}$ m. Hallar la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

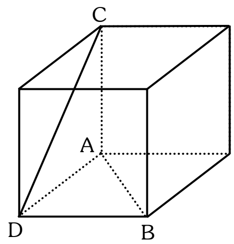
a) 2 m

b) 3 m

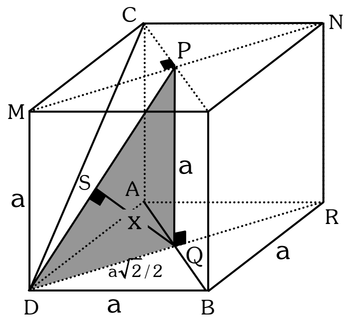
c) 1 m

d) 4 m

e) 5 m



Resolución:



Para determinar la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en el cubo, es necesario proyectar $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ sobre el plano DMNR, dichas proyecciones son $\overline{PD}$ y el punto Q respectivamente. Luego la menor distancia es el segmento perpendicular del punto Q a la proyección $\overline{PD}$ osea $\overline{QS}$.

Por relaciones métricas en el triángulo rectángulo DPQ:

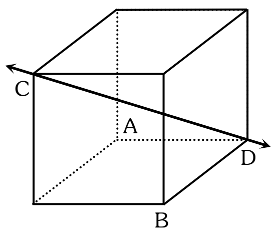
$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

De donde: $x=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, pero: $a=\sqrt{3}$

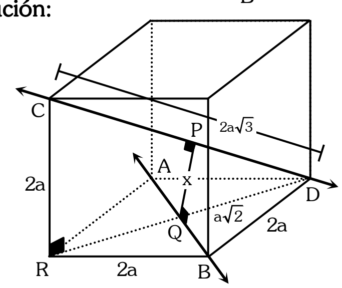
$x=\boxed{1\text{ m}}$ **Rpta.**

07. En el cubo de arista cuya longitud es $\sqrt{6}$ m.. Calcular la mínima distancia entre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

a) 2 m
b) 1 m
c) 3 m
d) 4 m
e) 6 m



Resolución:



La menor distancia entre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ es $\overline{PQ}$. Luego por semejanza entre los triángulos rectángulos CRD y QPD; se tiene:

$$\frac{x}{2a} = \frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{3}} \rightarrow x = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$

Pero: $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (Por dato)

Entonces: $x = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$

$x = \boxed{1\text{ m}}$ **Rpta.**

08. Cuanto mide el ángulo diedro cuyos $\frac{3}{7}$ exceden a los $\frac{3}{5}$ de su complemento en $15°56'34\frac{2''}{7}$

a) 34° b) 60° c) 68°
d) 54° e) 57°

Resolución:

Sea x° la medida del ángulo diedro, su complemento será $(90° - x)$.

Reduciendo a grados el ángulo $15°56'34\frac{2''}{7}$ se obtiene:

$$\frac{558°}{35}$$

Según las condiciones del problema se tiene:

$$\frac{3}{7}x - \frac{558°}{35} = \frac{3}{5}(90° - x)$$

$$15x - 558 = 21(90° - x)$$

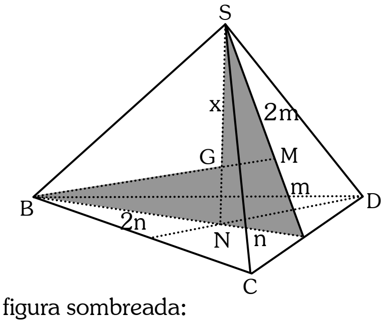
$$36x = 2\,448$$

$x = \boxed{68°}$ **Rpta.**

09. Se tiene un tetraedro S–BCD. Siendo los puntos M y N los baricentros de dos caras, además el punto G es el punto de intersección de los segmentos $\overline{BM}$ y $\overline{SN}$. Si: $SN = 12$ m. Hallar: SG.

a) 4 m b) 5 m c) 9 m
d) 10 m e) 12 m

Resolución:



En la figura sombreada:
Por el teorem,a de Menelao:

$$m \cdot x \cdot 2n = 2m \cdot GN \cdot 3n$$

$$x = 3(SN - x)$$

$$4x = 3(12 - x)$$

$x = \boxed{9\text{ m.}}$ **Rpta.**

10. Un poliedro convexo tiene como caras 12 triángulos, 16 cuadriláteros, 24 pentágonos y 13 hexágonos. Halar su número de vértices.

Resolución:

Recordemos el teorema de Euler:

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

Siendo:

C $\rightarrow$ n° de caras
V $\rightarrow$ n° de vértices
A $\rightarrow$ n° de aristas

Además sabemos:

$$A = \frac{k_1n_1 + k_2n_2 + k_3n_3 + \ldots + k_nn_n}{2} \quad \ldots.(\text{I})$$

Para nuestro problema:

$k_1n_1 = 3(12)$; $k_2n_2 = 4(16)$; $k_3n_3 = 5(24)$;
$k_4n_4 = 6(13)$, Reemplazando en (I)

$$A = \frac{(12)3 + (16)14 + (24)5 + (13)6}{2}$$

De donde: $A = 149$

De poliedro se tiene que:

$C = 12 + 16 + 24 + 13$
$C = 65$

Reemplazando en el teorema de Euler:

$65 + V = 149 + 2$

$V = \boxed{86}$ **Rpta.**

11. Hallar el número de vértices del poliedro convexo que está limitado por 32 cuadriláteros y 64 triángulos.

a) 45 b) 66 c) 70

d) 80 e) 90

Resolución:

Por el teorema de Euler:

$\boxed{C+V=A+2}$ ... (I)

Donde:

$C \rightarrow$ n° de caras

$V \rightarrow$ n° de vértices

$A \rightarrow$ n° de aristas

En el problema:

$C=32+64 \ \rightarrow \ C=96$

Conocemos además:

$$A=\frac{(32)(4)+(64)(3)}{2} \ \rightarrow \ A=160$$

Reemplazando en (I)

$96+V=160+2$

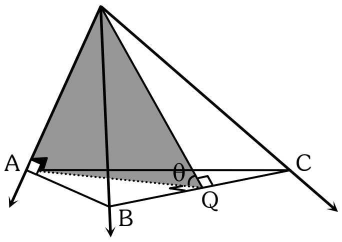
$V=\boxed{66}$ **Rpta.**

12. Un triedro "O" es intersectado por un plano en los puntos A, B y C sobre sus aristas, de modo que $\overline{OA}$ sea perpendicular al plano. El área del triángulo ABC es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ del área del triángulo BOC. Hallar la medida del diedro $\overline{BC}$.

a) 50° b) 30° c) 45°

d) 80° e) 90°

Resolución:



Por dato se tiene que:

$$\text{Area}(\Delta\ ABC)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\text{Area}(\Delta\ BOC)\ \ldots\ (\ I\ )$$

En la figura: $OA \perp$ plano ABC $\rightarrow OA \perp \overline{AQ}$

Por el teorema de las tres perpendiculares:

$\overline{OQ} \perp \overline{BC} \rightarrow \overline{AQ} \perp \overline{BC}$

Luego por teoría:

$\text{Área}(\Delta ABC)=\text{Área}(\Delta BOC).\cos\ \theta$ ... (II)

De (I) y (II) se tiene que:

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ \theta=\boxed{30^\circ}$$ **Rpta.**

13. En la figura los rectángulos ABCD y ADFG se encuentran en planos que forman un diedro de 120°. Hallar BF. Si: $CD=AG=2$ m y $FG=6$ m.

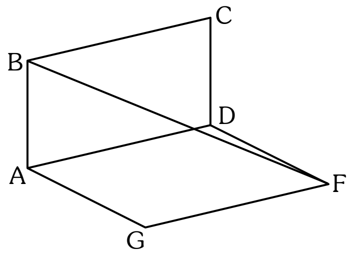
a) $2\sqrt{3}$ m

b) $3\sqrt{3}$ m

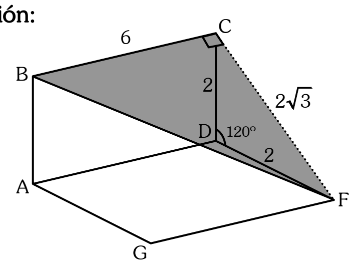
c) $5\sqrt{5}$ m

d) $4\sqrt{3}$ m

e) $3\sqrt{5}$ m



Resolución:



En el Δ CDF: CF=$2\sqrt{3}$ m.

Luego en el triángulo rectángulo BCF, por el teorema de pitágoras:

$BF^2=6^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2$

$BF=\boxed{4\sqrt{3}\ \text{m.}}$ **Rpta.**

14. Un plano intersecta a las aristas de un triedro "O" en los puntos A, B y C de modo que:

$m\measuredangle AOB = m\measuredangle COB = 60^o$ y además

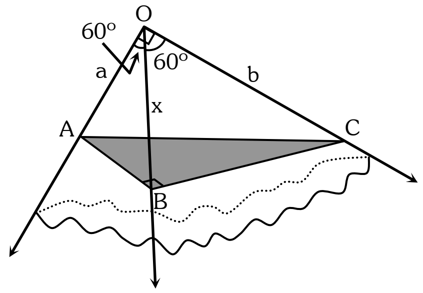
$m\measuredangle AOC = m\measuredangle ABC = 90^o$.

Hallar OB, si: $OA + OC = 10$ m .

a) 4 m b) 5 m c) 6 m

d) 7 m e) 8 m

Resolución:



Por relaciones métricas en el Δ AOB :

$AB = \sqrt{a^2 - ax + x^2}$

En el Δ BOC

$BC = \sqrt{b^2 - bx + x^2}$

Por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo AOC:

$AC = \sqrt{a^2 + b^2}$

Luego en el triángulo rectángulo ABC; por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\sqrt{a^2 - ax + x^2}\right)^2 + \left(\sqrt{b^2 - bx + x^2}\right)^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2$$

$$a^2 - ax + x^2 + b^2 - bx + x^2 = a^2 + b^2$$

$$2x^2 = ax + bx \rightarrow 2x^2 = x(a + b)$$

Pero: $a + b = 10$

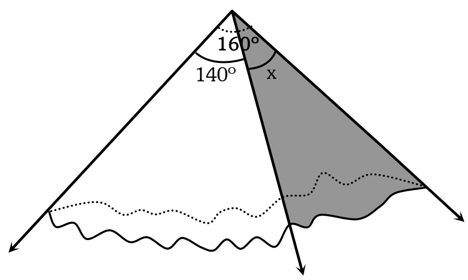
De donde: $x = \boxed{5\text{ m}}$ **Rpta.**

15. Dos caras de un ángulo triedro miden 140° y 160° respectivamente la tercera cara puede medir:

a) 10° b) 20° c) 40°

d) 60° e) 80°

Resolución:



En el triedro se debe cumplir:

$160^o - 140^o < x < 160^o + 140^o$

$20^o < x < 300^o$

$20^o < x$ .... (I)

También:

$0^o < x + 140^o + 160^o < 360^o$

$x < 60^o$ .... (II)

De (I) y (II): $20^o < x < 60^o$

Luego la tercera cara puede medir: $\boxed{40^o}$ **Rpta.**